КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Корешков Н.А.

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ.

КАЗАНЬ 2004.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 1. ЛИНЕЙНОЕ ПРОСТРАНСТВО

ГЛАВА 2. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

ГЛАВА 3. ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА СО СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ

Глава 1. Линейное пространство

1. Линейное пространство

В различных разделах математики и физики часто встречается ситуация, когда с некоторой совокупностью объектов можно производить операции сложения и умножения на скаляр. Причем эти операции всегда обладают рядом одинаковых свойств. Выделяя эти общие свойства, приходим к следующему определению линейного (векторного) пространства.

Определение 1.1. *Множество V называется линейным (векторным) пространством над полем k, а его элементы векторами, если*

а) на V задана бинарная операция $V \times V \to V$, обычно называемая сложением: $(v_1, v_2) \to v_1+ v_2$, удовлетворяющая следующим аксиомам:

Ia) $v_1+ v_2= v_2+ v_1$ (коммутативность)

IIa) $(v_1+ v_2)+v_3=v_1+ (v_2+v_3)$ (ассоциативность)

IIIa) существует такой нейтральный элемент 0, называемый нулевым вектором, что $v+\mathbf{0}=v$, для любого $v \in V$;

IV а) для любого вектора $v \in V$ существует вектор $v' \in V$ такой, что $v+v'=0$. Вектор v' называют противоположным вектором и обозначают $- v$.

Перечисленные аксиомы означают, что множество V является абелевой аддитивной группой.

б) на множестве $k\times V$ задана операция $(\lambda,v) \to \lambda v\in V$, называемая умножением вектора на скаляр, удовлетворяющая еще четырем аксиомам:

Iб) $\lambda(v_1+v_2)= \lambda v_1+ \lambda v_2$

IIб) $(\alpha+\beta)v=\alpha v+\beta v$

$\lambda,\alpha,\beta\in k$, $v,v_1,v_2 \in V$; (аксиомы дистрибутивности)

IIIб) $(\alpha\beta)\,v=\alpha(\beta\, v)$ *(ассоциативность),* $\alpha,\beta\in k$, $v\in V$*;*

IVб) $1\cdot v=v$ *(унитарность)*

В качестве поля k в дальнейшем часто будет фигурировать либо поле комплексных чисел **C**, либо поле действительных чисел **R**. Но основные свойства линейного пространства не зависят от природы основного поля. Поэтому многие свойства и конструкции, связанные с линейным пространством будут рассматриваться над произвольным полем.

Примеры линейных пространств.

1. Пусть $V=\{(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n),\alpha_i\in k, i=1,...,n\}$ – множество всевозможных наборов длины n с компонентами из поля k. Для наборов $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)\in V$ и $\beta=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)\in V$ определим их сумму $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n)\in V$ по правилу: $\gamma_i=\alpha_i+\beta_i\ i=1,...,n$. Произведение на скаляр также определим покоординатно, т.е. $\lambda\alpha=(\lambda\alpha_1,\lambda\alpha_2,...,\lambda\alpha_n)$.

Тогда аксиомы Iа, IIа, Iб-IVб вытекают из соответствующих аксиом поля k, т.к. все проверки осуществляются покоординатно. Нейтральным элементом будет набор (0,0,…,0), состоящий из n нейтральных элементов поля. Наконец, противоположным вектором будет набор $-\alpha=(-\alpha_1, -\alpha_2,...,-\alpha_n)$, состоящий из элементов, являющихся противоположными для компонент вектора α. Они существуют в силу соответствующей аксиомы в поле. Это пространство называется пространством строк длины n, и обозначается k^n.

Как мы вскоре увидим, любое n-мерное векторное пространство может быть отождествлено с пространством строк длины n.

2. Обозначим через **R**(a,b) множество всех функций на интервале $(a,b) \subset R$ со значениями в **R**. Операции сложения и умножения на скаляр введем поточечно, т.е. $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$, , $(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$, где $f,g \in R(a,b)$, λ**R**, $x \in (a,b)$.

Тогда проверка аксиом векторного пространства в **R**(a,b) сводится к проверке соответствующих свойств на множестве действительных чисел **R**.

2. Линейная зависимость и ее свойства

Основным инструментом в изучении свойств линейного пространства является понятие линейной зависимости векторов.

Определение 2.1. *Набор векторов $v_1,v_2,\ldots,v_m$ пространства V называется линейно зависимым, если существует ненулевой набор скаляров $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m), \alpha_i \in k, i=1,\ldots,m$ такой, что*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_m v_m = 0 \tag{2.1}$$

(Здесь 0 *– нулевой вектор пространства V.)*

Заметим, что при $m=1$ система, состоящая из одного вектора v, будет линейно зависимой тогда и только тогда, когда $v=0$. Действительно, если $v=0$, то, взяв $\alpha_1=1$, имеем $1 \cdot v = 0$. Обратно, если $\alpha \cdot v = 0$ и $\alpha \neq 0$, то, умножая последнее равенство на α^{-1}, имеем $v=0$.

В дальнейшем часто будем использовать эквивалентное определение линейной зависимости.

Определение 2.2. *Набор векторов $v_1,v_2,\ldots,v_m$, $m \geq 2$, пространства V называется, линейно зависимым, если один из этих векторов является линейной комбинацией остальных, т.е.*

$$v_j = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{j-1} v_{j-1} + \alpha_{j+1} v_{j+1} + \ldots + \alpha_m v_m \tag{2.2}$$

для некоторого j и некоторых констант $\alpha_1,\ldots,\alpha_{j-1},\alpha_{j+1},\ldots,\alpha_m$.

Проверим эквивалентность этих определений при $m>1$. Пусть выполнено определение 2.1. Т.к. набор $(\alpha_1,...,\alpha_m)$ ненулевой, то существует номер j такой, что $\alpha_j \neq 0$. Разделив соотношение (2.1) на α_j и переместив слагаемые с номерами, отличными от j, в правую часть этого соотношения, получим:

$v_j = -\frac{\alpha_1}{\alpha_j}v_1 - ... - \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j}v_{j-1} - \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j}v_{j+1} - ... - \frac{\alpha_m}{\alpha_j}v_m$. Т.е. выполняется соотношение (2.2).

Если имеет место соотношение (2.2), то, переместив вектор v_j в правую часть этого соотношения, получим:

$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_{j-1}v_{j-1} - v_j + \alpha_{j+1}v_{j+1} + ... + \alpha_m v_m = 0$. Последнее равенство показывает, что определение 2.1 выполнено, т.к. набор $(\alpha_1,...,\alpha_{j-1},-1,\alpha_{j+1},...,\alpha_m)$ очевидно ненулевой.

Отметим некоторые свойства линейной зависимости.

Свойство 2.1. *Если некоторая подсистема векторов линейно зависима, то и вся система векторов также линейно зависима.*

Доказательство. Пусть, например, первые s векторов всей системы линейно зависимы, т.е.

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_s v_s = 0,$$

где не все α_i равны нулю. Перепишем последнее соотношение следующим образом:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_s v_s + 0 \cdot v_{s+1} + ... + 0 \cdot v_m = 0.$$

Мы получили нетривиальную линейную зависимость системы векторов $v_1, ..., v_s, ..., v_m$.

Заметим, что мы воспользовались условием $0 \cdot v=0$, которое получается с помощью дистрибутивности умножения, а именно $0 \cdot v=(0+0) \cdot v=0 \cdot v+ 0 \cdot v$.

Свойство 2.2. *Любая подсистема линейно независимой системы векторов сама линейно независима.*

Доказательство. Непосредственно следует из предыдущего (рассуждение от противного).

Свойство 2.3. *Система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.*

Утверждение легко вытекает из свойства 2.1, если заметить, что нулевой вектор представляет линейно зависимую систему.

Свойство 2.4. *Если векторы $v_1,v_2,\ldots,v_k$ линейно независимы, а $v_1,v_2,\ldots,v_k,v$ линейно зависимы, то вектор v линейно выражается через $v_1,v_2,\ldots,v_k$.*

Доказательство. В силу линейной зависимости векторов $v_1,\ldots,v_k,v$ существует ненулевой набор $(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\alpha)\neq(0,\ldots,0,\ldots,0)$, что $\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\ldots+\alpha_k v_k+\alpha v=0$. Если $\alpha\neq 0$, то утверждение очевидно. Если же $\alpha=0$, то из линейной независимости векторов $v_1,\ldots,v_k$ следует, что $\alpha_1=\ldots=\alpha_k=0$. Это противоречит условию нетривиальности набора $(\alpha_1,\ldots,\alpha_k,\alpha)$.

3. Базис и размерность

Важнейшей характеристикой линейного пространства является понятие размерности. Чтобы ввести это понятие, нам потребуется следующая лемма.

Лемма (о замене) 3.1. *Если векторы системы $U=\{u_1,\ldots,u_n\}$ линейно независимы и линейно выражаются через векторы системы $W=\{w_1,\ldots,w_m\}$, то $n\leq m$.*

Доказательство. Доказательство будем вести индукцией по m. При m=1 имеем $u_1=\lambda_1 w_1, u_2=\lambda_2 w_1,\ldots,u_n=\lambda_n w_1$. Все коэффициенты λ_j отличны от нуля, т.к. в противном случае система векторов содержала бы нулевой вектор, что противоречит линейной независимости U, в силу следствия 2.3. Предположим, что $n > m = 1$. Тогда $\lambda_2 u_1 - \lambda_1 u_2 = \lambda_2 \lambda_1 w_1 - \lambda_1 \lambda_2 w_1 = 0$, т.е. подсистема $\{u_1, u_2\}$ – линейно зависима. Опять получаем противоречие с линейной независимостью U (см. свойство 2.2.).

Предположим, что лемма верна для систем W с m-1 векторами и докажем ее для систем с m векторами. Пусть в соотношениях

$$\begin{aligned} u_1 &= \lambda_{11} w_1 + \ldots + \lambda_{1m} w_m \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n &= \lambda_{n1} w_1 + \ldots + \lambda_{nm} w_m \end{aligned}$$

все коэффициенты $\lambda_{im} = 0, i = 1,\ldots,n$. Тогда по предположению индукции $n \le m - 1 < m$. Если для некоторого i $\lambda_{im} \ne 0$, то, меняя нумерацию, будем считать, что i=n, $\lambda_{nm} \ne 0$. Рассмотрим новую систему векторов $U' = \{u'_1,\ldots u'_{n-1}\}$, где $u'_i = u_i - \dfrac{\lambda_{im}}{\lambda_{nm}} u_n$, $i = 1,\ldots,n-1$. Тогда $u'_i = \sum\limits_{j=1}^{m-1} \mu_{ij} w_j$, $i = 1,\ldots,n-1$, т.к. после приведения подобных членов коэффициенты в выражении для u'_i при w_m будут равны нулю.

Проверим линейную независимость системы векторов $U' = \{u'_1,\ldots u'_{n-1}\}$. Предположим, что она линейно зависима, т.е. существует ненулевой набор $(\alpha_1, \alpha_2,\ldots,\alpha_{n-1})$ такой, что $\alpha_1 u'_1 + \alpha_2 u'_2 + \ldots + \alpha_{n-1} u'_{n-1} = 0$. Подставим вместо u'_i их выражения: $u_i - \dfrac{\lambda_{im}}{\lambda_{nm}} u_n$. Получим $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_{n-1} u_{n-1} + \beta u_n = 0$. В силу линейной независимости системы $U = \{u_1,\ldots u_n\}$ последнее соотношение возможно только в случае, когда $\alpha_1 = _{\ldots} = \alpha_{n-1} = \beta = 0$. Это противоречит тому, что $(\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}) \ne (0,\ldots,0)$.

Итак, система векторов $U' = \{u'_1, \dots u'_{n-1}\}$ линейно независима и линейно выражается через систему $\hat{W} = \{w_1, \dots, w_{m-1}\}$. По предположению индукции $n - 1 \le m - 1$, т.е. $n \le m$. Лемма доказана.

Следствие 3.2. *Пусть* $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ *и* $W = \{w_1, \dots, w_m\}$ *– две максимальные линейно независимые системы векторов пространства V. Тогда n=m.*

Доказательство: В силу максимальности системы W набор векторов $\{u_s, w_1, \dots, w_m\}$ будет линейно зависимым. Таким образом, каждый вектор u_s системы U линейно выражается через вектора системы *W*. Мы попадаем в условия леммы о замене и потому $n \le m$. Меняя местами системы *U* и *W*, получим $m \le n$. Из двух полученных неравенств вытекает, что *n=m*.

Доказанное следствие позволяет корректно определить понятие размерности векторного пространства.

Определение 3.3. *Линейное пространство называется конечномерным, если в нем существует конечная максимальная линейно независимая система векторов. В противном случае говорят, что пространство бесконечномерно. Любую такую систему векторов будем называть базисом пространства.*

Из следствия 3.2 вытекает, что количество векторов в любом базисе одинаково. Это позволяет сформулировать следующее определение размерности.

Определение 3.4. *Количество векторов в любом базисе конечномерного пространства V называется его размерностью и обозначается* $\dim_k V$ *(Здесь k–поле скаляров, участвующее в определении векторного пространства).*

Примеры:

1. Пространство k^n строк длины n имеет размерность n. Действительно, вектора $e_i = (0,...1,...,0)$, i=1,…n образуют базис k^n. Любой вектор $v = (\alpha_1,...\alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Если $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = 0$, то $(\alpha_1,...\alpha_n) = 0$, т.е. $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$. Итак, векторы $e_1,...,e_n$ образуют максимальную линейно независимую систему.

2. Совокупность всех многочленов от переменного x

$$k[x] = \{f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, a_i \in k, n \in N\}$$

является бесконечномерным пространством, так как для любого n набор векторов $1, x, ..., x^n$ – линейно независим.

4. Координаты. Изоморфизм пространств

Теорема 4.1. *Пусть V n-мерное векторное пространство и* $e_1,..,e_n$ *– его базис. Тогда*

1. любой вектор из V единственным образом представляется в виде $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, $\alpha_i \in k$.

2. любую линейно независимую систему векторов $v_1, v_2, …, v_m$, $m<n$ *можно дополнить до базиса пространства V.*

Доказательство. Так как система векторов $e_1,..,e_n$ максимальная линейно независимая система, то вектора $v, e_1,..,e_n$ – линейно зависимы. То есть существует ненулевой набор $(\alpha, \alpha_1,..,\alpha_n)$ такой, что $\alpha v + \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n = 0$, причем $\alpha \neq 0$. Тогда $v = -\frac{\alpha_1}{\alpha} e_1 - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha} e_n$.

Если для некоторого вектора v существуют два представления: $v = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n$ и $v = \beta_1 e_1 + ... + \beta_n e_n$. То, вычитая из одного соотношения другое, имеем: $(\alpha_1 - \beta_1)e_1 + ... + (\alpha_n - \beta_n)e_n = 0$.

Т.к. вектора $e_1,..,e_n$ линейно независимы, то $\alpha_1 - \beta_1 = ... = \alpha_n - \beta_n = 0$, т.е. $\alpha_1 = \beta_1,...,\alpha_n = \beta_n$.

Рассмотрим второй пункт теоремы. Из совокупности векторов $v_1,..,v_m,e_1,..,e_n$, удалим все те, которые линейно выражаются через предыдущие. Оставшийся набор $v_1,..,v_m,e_{i_1},..,e_{i_s}$ содержит все вектора $v_1,..,v_m$, в силу их линейной независимости. Предположим, что получившийся набор линейно зависим, т.е.

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_m v_m + \beta_{i_1} e_{i_1} + ... + \beta_{i_s} e_{i_s} = 0.$$

Разделив это соотношение на ненулевой коэффициент β_{i_j} с наибольшим номером, получим, что вектор e_{i_j} является линейной комбинацией предыдущих. Следовательно, набор $v_1,..,v_m,e_{i_1},..,e_{i_s}$ – линейно независим.

Кроме того, любой вектор пространства V является линейной комбинацией базисных векторов $e_1,..,e_n$, а значит и линейной комбинацией векторов $v_1,..,v_m,e_1,..,e_n$. Но любой вектор последнего набора, по построению, линейно выражается через вектора $v_1,..,v_m,e_{i_1},..,e_{i_s}$.

Поэтому вектора $v_1,..,v_m,e_{i_1},..,e_{i_s}$ образуют базис пространства V. Что доказывает второй пункт рассматриваемой теоремы.

Скаляры $\alpha_1,..,\alpha_n \in k$, возникающие при разложении вектора $v \in V$ по базису: $v = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n$, называются координатами вектора v в базисе $e_1,..,e_n$. Если $u = \beta_1 e_1 + ... + \beta_n e_n$ еще один вектор из V, то $v + u = (\alpha_1 + \beta_1)e_1 + ... + (\alpha_n + \beta_n)e_n$, $\lambda v = (\lambda\alpha_1)e_1 + ... + (\lambda\alpha_n)e_n$, $\lambda \in k$. Таким образом, в n–мерном векторном пространстве выполняются те же правила работы с координатами, что и в 3-мерном пространстве, а именно: координаты суммы двух векторов равны сумме соответствующих координат, а координаты произведения вектора на скаляр состоят из координат исходного вектора, умноженных на этот скаляр.

Указанное обстоятельство позволяет отождествлять произвольное n–мерное векторное пространство и пространство строк длины n. Для точной формулировки, описывающей это отождествление, введем понятие изоморфизма векторных пространств.

Определение 4.2. *Пусть V и U – два линейных пространства над полем k. Изоморфизмом пространства V в пространство U называется биекция φ (т.е. взаимно однозначное отображение) V в U, удовлетворяющее условию:*

$$\varphi(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1\varphi(v_1) + \alpha_2\varphi(v_2),\ v_1, v_2 \in V, \alpha_1, \alpha_2 \in k.$$

Если V есть n–мерное векторное пространство, $e_1,..,e_n$ – некоторый фиксированный базис V, то определим отображение φ пространства V в k^n формулой: $\varphi(v) = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, где $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ - координаты вектора v в базисе $e_1,..,e_n$. Из определения φ легко следует, что отображение является биекцией V на пространство k^n. А из вышеприведенного замечания о правилах действия с координатами суммы и произведения на скаляр следует линейность отображения φ, которую удобнее проверять в виде двух условий: $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2), \varphi(\alpha v) = \alpha\varphi(v)$.

Построенный изоморфизм показывает, что структура произвольного конечномерного пространства однозначно определяется его размерностью. Чтобы подчеркнуть этот факт, приведем следующую теорему.

Теорема 4.3. *Два линейных пространства над полем k изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают.*

Доказательство. Пусть пространства V и W изоморфны и $\varphi-$ соответствующая биекция из V на W с условием линейности. Если $v_1,..,v_n$ - базис пространства V, то $\varphi(v_1),..,\varphi(v_n)$ - базис W. Действительно, любой вектор $w \in W$ имеет прообраз $v \in V$, т.е.

$$w = \varphi(v) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(v_i).$$

Если же $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(v_i) = 0$, то $\varphi(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i) = 0$. Но в силу линейности φ, имеем: $\varphi(0) = 0$. А т.к. $\varphi-$ биекция , то $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$. Из линейной независимости векторов $v_1,..,v_n$ следует, что $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$. Итак, мы проверили, что вектора $\varphi(v_1),..,\varphi(v_n)$ образуют максимальную линейно независимую систему в W, следовательно, $\dim_k W = n = \dim_k V$.

Обратно, пусть $\dim_k W = \dim_k V = n$. Обозначим через $v_1,..,v_n$; $w_1,..,w_n$ базисы в V и W. Определим отображение φ на базисных элементах: $\varphi(v_i) = w_i, i = 1,...,n$. Т.к. $v_1,..,v_n$ базис V, то можно определить отображение на всем пространстве V по правилу: $\varphi(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i$. Построенное отображение является биекцией пространства V на пространство W, т.к. $w_1,..,w_n$ базис. Линейность построенного отображения очевидна, т.е. φ – изоморфизм пространств V и W.

5. Координаты вектора в новом базисе

Пусть V n-мерное векторное пространство, а $e_1,..,e_n$ и $e'_1,..,e'_n$ – два его базиса. Запишем каждый вектор нового (штрихованного) базиса $e'_1,..,e'_n$ в виде линейной комбинации векторов старого (не штрихованного) базиса:

$$e'_1 = t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + ... + t_{n1}e_n$$
$$......................$$
$$e'_n = t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + ... + t_{nn}e_n$$

или в матричной форме:

$$(e'_1, e'_2, ..., e'_n) = (e_1, e_2, ..., e_n)\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ t_{n1} & t_{n2} & \cdots & t_{nn} \end{bmatrix}$$

Возникающую таким образом матрицу T называют матрицей перехода от старого базиса к новому. Как видно из ее определения, элементами матрицы перехода являются координаты векторов нового базиса (записываемые в нашей редакции по столбцам) в старом базисе. Матрица T - невырожденная. Если столбцы матрицы T удовлетворяют нетривиальному соотношению с коэффициентами $\lambda_1,...,\lambda_n$, то $\lambda_1 e'_1 + ... + \lambda_n e'_n = 0$. Что противоречит линейной независимости базисных элементов $e'_1,...,e'_n$.

Здесь $(e'_1,...,e'_n)$ и $(e_1,...,e_n)$ матрицы, состоящие из одной строки и n столбцов. А произведение в правой части равенства вычисляется по обычному правилу умножения матриц.

Пусть $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i$ - представление вектора x в двух данных базисах. Используя выражение новых базисных векторов e'_i через старые e_i получим:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x'_i t_{ji} e_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x'_i t_{ji}\right)e_j .$$

Сравнивая эту запись с представлением вектора $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ и используя единственность разложения вектора по базису, имеем: $x_j = \sum_{i=1}^{n} x'_i t_{ji}$, $j = 1,...,n$.

В матричной форме это соотношение можно переписать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix},$$

или $X' = T^{-1}X$, где X, X' – столбцы координат вектора x в старом и новых базисах, а $T = \lfloor t_{ij} \rfloor$.

Пример. Пусть V – 3-мерное мерное пространство, e_1, e_2, e_3 – его базис. Вектор x в этом базисе имеет вид: $x = e_1 + 2e_2 - e_3$.

Новый базис связан со старым формулами: $e'_1 = e_1 - e_2 + e_3$, $e'_2 = 2e_1 - e_2 + 3e_3$, $e'_3 = 3e_1 + e_2 + 6e_3$. Найдем координаты вектора x в новом базисе. Т.к. вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований сводится к составлению произведения из элементарных матриц, то применение этого произведения к столбцу X равносильно выполнению тех же элементарных преобразований и в том же порядке, которые производятся для приведения исходной матрицы T к единичной.

Используя это замечание, произведем соответствующие вычисления.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 6 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Следовательно, в новом базисе вектор x имеет вид: $x = 20e'_1 - 17e'_2 + 5e'_3$.

6. Сумма и пересечение пространств

Пусть U некоторое подмножество в векторном пространстве V. Будем говорить, что U является подпространством в V, если оно является линейным пространством (т.е. выполняются все восемь аксиом определения 1.1) относительно операций сложения и умножения на скаляр, которые определены в V.

Имеет место следующий критерий того, что подмножество U является подпространством.

Критерий (подпространства) 6.1. *Подмножество U векторного пространства V является подпространством т. и т.т., когда для любых векторов $u_1, u_2 \in U$ и любых скаляров $\alpha_1, \alpha_2 \in k$ вектор $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ принадлежит V.*

Проверить самостоятельно.

Естественным примером линейного подпространства является линейная оболочка векторов. Пусть $v_1, ..., v_m$ некоторый фиксированный набор векторов пространства V. Назовем линейной оболочкой системы векторов $v_1, ..., v_m$ множество всевозможных сумм $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i, \lambda_i \in k$.

Если $v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$, $v' = \sum_{i=1}^{m} \lambda'_i v_i$, то $v + v' = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i + \lambda'_i) v_i$, $\lambda v = \sum_{i=1}^{m} (\lambda \lambda_i) v_i$, $\lambda \in k$. Следовательно, это множество замкнуто относительно операции сложения векторов и умножения на скаляр. В силу критерия 6.1. это множество будет подпространством. В дальнейшем оно будет обозначаться символом $< v_1, v_2, ..., v_m >$.

Легко видеть, что максимальная линейно независимая система векторов из набора $v_1, v_2, ..., v_m$ остается максимальной линейно независимой системой во всем пространстве $< v_1, v_2, ..., v_m >$. Это дает возможность эффективно строить базис в линейных оболочках.

Определим сумму $V+W$ двух подпространств U и W пространства V как совокупность векторов вида $u+w$, $u \in U$, $w \in W$. Если $u_1+w_1, u_2+w_2 \in U+W$, то

$$\alpha_1(u_1+w_1)+\alpha_2(u_2+w_2)=(\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2)+(\alpha_1 w_1+\alpha_2 w_2) \in U+W,$$

т.к. $\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2 \in U$, $\alpha_1 w_1+\alpha_2 w_2 \in W$.

Пусть $u_1,...,u_s$ базис U, $w_1,...,w_t$ базис W. Тогда из определения суммы подпространств имеем, что $U+W=<u_1,...,u_s,w_1,...,w_t>$. Поэтому базисом пространства $U+W$ является максимальная линейно независимая подсистема $u_{i_1},...,u_{i_m},w_{j_1},...,w_{j_p}$ системы $u_1,...,u_s,w_1,...,w_t$, а $\dim_k(U+W)=m+p$.

Вычислим теперь размерность пересечения $U \cap W$ подпространств U, W, которое также является подпространством.

Любой вектор x, принадлежащий пересечению, можно записать двумя способами: $x=\sum_{i=1}^{s} x_i u_i$, $x=\sum_{i=1}^{t} y_i w_i$. Если $(u_{i1}, ..., u_{in})^{tr}$ – координатное представление вектора u_i, а $[w_{i1}, ..., w_{in}]^{tr}$ – аналогичное представлению вектора w_i в некотором базисе пространства V, то, приравнивая две записи вектора x, получим систему линейных однородных уравнений для нахождения коэффициентов $x_1,...,x_s,y_1,...,y_t$:

$$x_1\begin{pmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ u_{1n} \end{pmatrix}+...+x_s\begin{pmatrix} u_{s1} \\ \vdots \\ u_{sn} \end{pmatrix}=y_1\begin{pmatrix} w_{11} \\ \vdots \\ w_{1n} \end{pmatrix}+..+y_t\begin{pmatrix} w_{t1} \\ \vdots \\ w_{tn} \end{pmatrix}. \qquad (6.1)$$

Множество решений этой системы обозначим M.

Ранг r системы (6.1) равен максимальному числу линейно независимых столбцов, т.е. $r=m+p=\dim_k(U+W)$. Количество векторов в фундаментальной системе решений равно $(s+t)-r=$ $=\dim_k U+\dim_k W-\dim_k(U+W)$.

Каждому вектору $m=(x_1^0,...,x_s^0,y_1^0,...,y_t^0)\in M$ поставим в соответствие вектор $x=\sum_{i=1}^{s}x_i^0u_i$. Легко проверить (проделайте это сами), что указанное соответствие определяет изоморфизм пространств M и $U\cap W$. В силу теоремы 4.3. $\dim_k M=\dim_k U\cap W$ и мы приходим к следующему утверждению:

Теорема 6.2. *Если* U *и* W *конечномерные подпространства пространства V, то* $\dim_k U\cap W=\dim_k U+\dim_k W-\dim_k(U+W)$.

Из доказательства теоремы вытекает способ построения базиса пересечения $U\cap W$. Действительно, если $m_j=\ (x_1^{(j)},...,x_s^{(j)},y_1^{(j)},...,y_t^{(j)})\in M$, где j=1, …, *(s+t)–r*, фундаментальная система решений для (6.1), то в силу изоморфизма M и $U\cap W$, набор

$$x^{(j)}=\sum_{i=1}^{s}x_i^{(j)}u_i\ ,\ j=1,\ \ldots,\ (s+t)-r,$$

является базисом пересечения $U\cap W$.

Пример. Базис пространства U: $u_1=(1,1,2)$, $u_2=(0,1,-1)$. Базис пространства W: $w_1=(1,2,1)$, $w_2=(1,0,1)$.

Вычисляя ранг матрицы, составленной из координат векторов u_1,u_2,w_1,w_2, получим, что u_1,u_2,w_2 образуют максимальную линейно независимую систему векторов. Т.е. базис $U+W$ образуют вектора u_1,u_2,w_2 и $\dim_k(U+W)=3$.

Из формулы теоремы 6.2 сразу получаем, что $\dim_k(U\cap W)=1$. Однако для нахождения базиса пересечения $U\cap W$ необходимо решить систему 6.1:

$$x_1\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=y_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+y_2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Ее фундаментальный набор решений содержит единственный вектор, например, (1,1,1,0). Соответственно, базисом пересечения $U \cap V$ является вектор $u_1 + u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

7. Прямые суммы

Представление любого вектора из суммы $U+W$ двух подпространств, вообще говоря, неоднозначно, и это связано с наличием ненулевого пересечения $U \cap W$. Если $U \cap W = 0$, то из условия $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$ следует $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$. И т.к. $u_1 - u_2 \in U$, а $w_2 - w_1 \in W$, то $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 = 0$. В этом случае имеет место единственность разложения любого вектора из $U+W$ на сумму своих компонент. Обобщая эту ситуацию на случай n слагаемых, приходим к следующему определению:

Определение 7.1. *Сумма* $U = U_1 + \ldots + U_n = \{u = \sum_{i=1}^{n} u_i, \quad u_i \in U_i\}$ *называется прямой суммой подпространств U_i, $i=1,\ldots,n$, если для любого i выполняется условие:* $U_i \cap (U_1 + \ldots + \hat{U}_i + \ldots + U_n) = 0$. *В этом случае U обозначается как* $U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_n$ *или* $\oplus_{i=1}^{n} U_i$. *(Здесь* $U_1 + \ldots + \hat{U}_i + \ldots + U_n = U_1 + \ldots + U_{i-1} + U_{i+1} + \ldots + U_n$.*)*

Отметим два важных свойства прямых сумм.

Свойство 7.2. *Сумма* $U = U_1 + \ldots + U_n$ *является прямой т. и т.т., когда любой вектор* $u \in U$ *единственным образом представляется в виде суммы* $u = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, $u_i \in U_i$, *$i=1,\ldots,n$.*

Доказательство. Пусть $U = \oplus_{i=1}^{n} U_i$. Если $u = u_1 + \ldots + u_n = u'_1 + \ldots + u'_n$ два разложения вектора u, то для любого $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, имеем: $u_i - u'_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (u'_j - u_j)$. Из этого равенства следует, что вектор $u_i - u'_i$, принадлежащий U_i, принадлежит и сумме: $U_1+\ldots+\hat{U}_i+\ldots+U_n$. По определению прямой суммы получаем, что $u_i-u'_i=0$, $i=1,\ldots,n$, т.е. имеем единственность разложения вектора u.

Обратно, пусть $x\in U_i\cap(U_1+\ldots+\hat{U}_i+\ldots+U_n)$. Т.е. $x=u_i=u_1+\ldots$ $+u_{i-1}+u_{i+1}+\ldots+u_n$. Тогда $u_1+\ldots+u_{i-1}-u_i+u_{i+1}+\ldots+u_n=0$. Но нулевой вектор можно представить в виде 0=0+…+0, где каждое слагаемое принадлежит подпространству U_i, $i=1,\ldots,n$. Используя единственность разложения, имеем: $u_1=u_2=\ldots=u_n=0$, т.е. $x=0$. Следовательно, пространство U является прямой суммой своих подпространств.

Свойство 7.3. *Сумма* $U=U_1+\ldots+U_n$ *является прямой т.и.т.т., когда* $\dim U=\sum_{i=1}^{n}\dim U_i$.

Доказательство. Пусть $U=\oplus_{i=1}^{n}U_i$. Применим индукцию по количеству слагаемых n. При $n=1$, очевидно, $\dim U=\dim U_1$. Для вычисления $\dim U$ воспользуемся формулой из теоремы 6.2:

$$\dim(U_1+\ldots+U_n)=\dim U_1+\dim(U_2+\ldots+U_n)-\dim U_1\cap(U_2+\ldots+U_n).$$

По условию $U_1\cap(U_2+\ldots+U_n)=0$, т.е. $\dim U_1\cap(U_2+\ldots+U_n)=0$. Сумма $U_2+\ldots+U_n$ – прямая в силу свойства 7.2. Поэтому по предположению индукции $\dim(U_2+\ldots+U_n)=\sum_{j=2}^{n}\dim U_j$, т.е.

$$\dim U=\dim U_1+\sum_{j=2}^{n}\dim U_j=\sum_{j=1}^{n}\dim U_j.$$

Обратно, предположим, что $U=\sum_{j=1}^{n}U_j$ и $\dim U=\sum_{j=1}^{n}\dim U_j$. Обозначим через $u_{i1},\ldots,u_{ik_i}$ – базис пространства U_i, $i=1,\ldots,n$. Тогда из условия $U=\sum_{j=1}^{n}U_j$ вытекает, что $\{u_{11},\ldots,u_{1k_1},\ldots,u_{n1},\ldots,u_{nk_n}\}$ – система порождающих векторного пространства U. С другой стороны, $\sum_{j=1}^{n}k_j=\sum_{j=1}^{n}\dim U_j=\dim U$. Следовательно, $\{u_{11},\ldots,u_{nk_n}\}$ – базис пространства U. Тогда по свойству 7.2 сумма $\sum_{j=1}^{n}U_j$ – прямая.

Одним из важных случаев возникновения прямой суммы является конструкция дополнительного подпространства.

Теорема 7.4. *Пусть U подпространство в конечномерном пространстве V. Тогда существует такое подпространство W в V, что* $V = U \oplus W$.

Доказательство. Выберем какой-либо базис в *U*: $e_1,...,e_m$. Дополним его до базиса всего пространства *V*: $e_1,...,e_m,...,e_n$. Обозначим через *W* линейную оболочку $< e_{m+1},...,e_n >$. Тогда *V*=*U*+*W*, а, в силу свойства 7.2, $U \cap W = 0$. Т.е. $V = U \oplus W$.

Рассматривая прямые суммы, мы действовали пока в фиксированном векторном пространстве *V*. Такие прямые суммы называют внутренними. Иногда возникает необходимость в рассмотрении внешней прямой суммы двух векторных пространств над одним и тем же полем *k*, заранее никуда не вложенных в качестве подпространств. Под $U \oplus W$ в этом случае понимается совокупность *V* всевозможных пар (*u,w*), $u \in U$, $w \in W$. Операция сложения векторов из *V* и умножения их на скаляры определены формулами

$$(u, w) + (u', w') = (u + u', w + w');\ \alpha(u, w) = (\alpha u, \alpha w);\ u, u' \in U,\ w, w' \in W,\ \alpha \in k.$$

Векторы (*u,*0) образуют в *V* подпространство $\overline{U}$, изоморфное *U*, а векторы (0,*w*) образуют подпространство $\overline{W}$, изоморфное *W*. Соответствующими изоморфизмами являются отображения: (*u,*0) → *u*, (0,*w*) → *w*. Кроме того, *V* является внутренней прямой суммой своих подпространств $\overline{U}$ и $\overline{W}$.

Глава 2. Линейные операторы

1. Линейные отображения векторных пространств

Линейные отображения векторных пространств появляются в различных разделах математики. Их примерами могут служить вращения и отражения в трехмерном пространстве, а также операции дифференцирования и интегрирования в пространствах функций. Рассмотрим понятие линейного отображения в наиболее общем виде.

Определение 1.1. *Пусть V и W векторные пространства над полем k. Отображение φ из V в W называется линейным, если* $\varphi(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1\varphi(v_1) + \alpha_2\varphi(v_2)$, $v_1, v_2 \in V$, $\alpha_1, \alpha_2 \in k$.

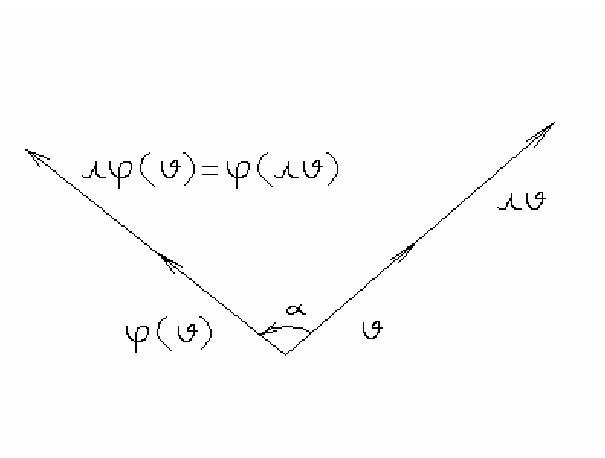
Наряду с термином линейное отображение часто используется его синоним: линейный оператор.

Частным случаем линейного отображения является линейная функция, когда в качестве пространства W берется одномерное пространство, обычно отождествляемое с основным полем k. Совокупность всех линейных отображений из пространства V в пространство W будем обозначать $Hom_k(V,W)$.

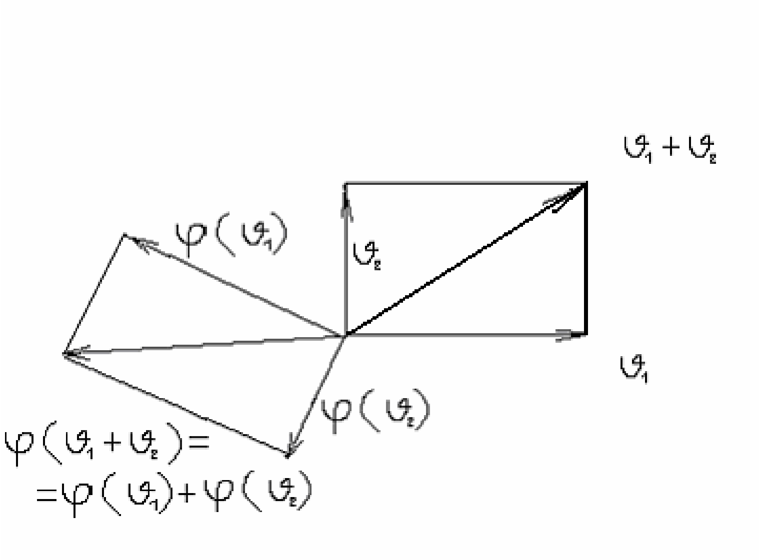
Примеры.

1) $V=W=R^2$ – действительная плоскость, φ – поворот каждого вектора из R^2 на фиксированный угол α. Тогда

а) $\varphi(\lambda v) = \lambda\varphi(v)$



б) $\varphi(v_1+v_2)=\varphi(v_1)+\varphi(v_2)$



2) $V=W=k[x]$ – кольцо многочленов от одной переменной x, $\varphi=\frac{d}{dx}$ – оператор дифференцирования. Тогда $\frac{d}{dx}(\alpha f+\beta g)=\alpha\frac{d}{dx}f+\beta\frac{d}{dx}g$.

С каждым линейным отображением $\boldsymbol{\varphi}$: $V\rightarrow W$ связаны два подпространства – его ядро $Ker\varphi=\{v\in V,\varphi(v)=0\}$ и образ $Jm\varphi=\{w\in W,w=\varphi(v),v\in V\}$.

Отметим следующую зависимость между размерностями ядра и образа.

Теорема 1.1. *Если V конечномерное векторное пространство над полем k, $\boldsymbol{\varphi}\in Hom_k(V,W)$, то пространства $Ker\ \boldsymbol{\varphi}$ и $Im\ \boldsymbol{\varphi}$ также конечномерны и* $\dim_k Ker\varphi+\dim_k Jm\varphi=\dim_k V$.

Доказательство. Т.к. $Ker\varphi \subseteq V$, то $\dim Ker\varphi \leq \dim V < \infty$, т.е. $Ker\ \varphi$ – конечномерно. Выберем базис $e_1,...,e_m$ пространства $Ker\ \varphi$ и дополним его до базиса $e_1,...,e_m,e_{m+1},...,e_n$ всего пространства V. Тогда любой вектор w, принадлежащий $Im\ \varphi$, можно представить в виде:

$$w = \varphi(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(e_i) = \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i \varphi(e_i).$$

Проверим, что $\varphi(e_{m+1}),...,\varphi(e_n)$ образует базис образа $Im\ \varphi$. Предположим, что $\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i \varphi(e_i) = 0$. Тогда $\varphi(\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i e_i) = 0$, т.е. $\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i e_i \in Ker\varphi$. Поэтому $\sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i$. Но линейная зависимость между базисными векторами возможна только в том случае, когда все коэффициенты равны нулю. В частности, $\alpha_{m+1} = ... = \alpha_n = 0$, т.е. $\varphi(e_{m+1}),...,\varphi(e_n)$ – линейно независимы. Итак, вектора $\varphi(e_{m+1}),...,\varphi(e_n)$ образуют базис образа $Im\ \varphi$ и $\dim_k Im\varphi = n-m = \dim_k V - \dim_k Ker\ \varphi$. Что и требовалось доказать.

2. Матрица линейного оператора

Зафиксируем два базиса $v_1,...,v_n$ и $w_1,...,w_m$ в пространствах V и W соответственно. Тогда для $\varphi \in Hom_k(V,W)$ выполнены соотношения:

$$\begin{gathered} \varphi(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + ... + a_{m1}w_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + ... + a_{mn}w_m \end{gathered}$$

Матрица $A_\varphi = \begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \cdots\cdots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{bmatrix}$ называется матрицей линейного оператора φ. Приведенную систему соотношений можно заменить одним матричным: $(\varphi(v_1),...,\varphi(v_n)) = (w_1,...,w_m)A_\varphi$, где произведение в правой части вычисляется по обычному правилу умножения матриц.

Пусть $x = x_1v_1 + ... + x_nv_n$ произвольный вектор из пространства V. Тогда

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i\varphi(v_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji}w_j = \sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i)w_j .$$

Т.е. координаты вектора $y = \varphi(x) = y_1w_1 + ... + y_mw_m$ вычисляются с помощью следующего матричного равенства:

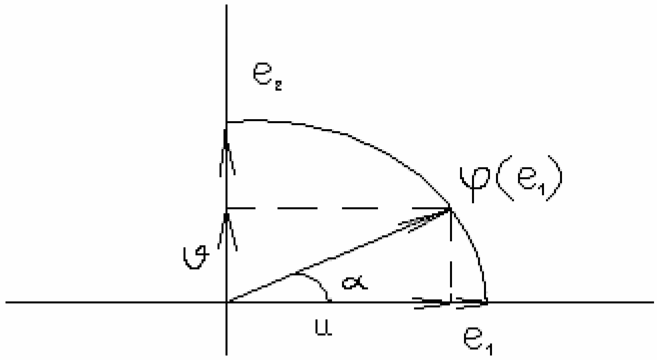
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Следовательно, для вычисления координат образа любого вектора достаточно знать матрицу соответствующего линейного оператора. И наоборот, при фиксированных базисах в пространствах V и W любая матрица A размера $m \times n$ задает оператор φ, если принять написанное выше равенство за определение. Нами доказана

Теорема 2.1. *Пусть* $V =< v_1,...,v_n >$ *и* $W =< w_1,...,w_m >$ *- линейные пространства с фиксированными базисами. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между элементами из* $Hom_k(V,W)$ *и* $m \times n$ *- матрицами с коэффициентами из основного поля k.*

Примеры.

1. Пусть φ - поворот каждого вектора на угол α в плоскости R^2. В качестве базисных векторов возьмем взаимно перпендикулярные векторы e_1, e_2 единичной длины. Тогда $\varphi(e_1) = u + v = \cos\alpha \cdot e_1 + \sin\alpha \cdot e_2$.



Аналогично $\varphi(e_2) = \cos\alpha \cdot e_2 - \sin\alpha \cdot e_1$. Поэтому матрицей этого линейного отображения будет матрица $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

2. Пусть $\varphi = \frac{d}{dx}$ - оператор дифференцирования кольца многочленов $R[x]$. Рассмотрим подпространство $R_n[x] = \{f(x) \in R[x], \deg f \leq n\}$, состоящее из многочленов, степень которых не превосходит n. Тогда $\frac{d}{dx} R_n[x] \subseteq R_n[x]$ и можно рассмотреть ограничение данного линейного оператора на подпространство $R_n[x]$. В качестве базисных векторов пространства $R_n[x]$ возьмем многочлены $1, x, ..., x^n$. Тогда $\varphi(x^i) = ix^{i-1}$, $i = 1, ..., n$, $\varphi(1) = 0$. Поэтому матрицей оператора дифференцирования в пространстве $R_n[x]$ будет матрица

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только линейные операторы, действующие из пространства V, в то же самое пространство V.

Если V n-мерное векторное пространство, а $e_1,...,e_n$ и $e'_1,...,e'_n$ два его базиса, то линейный оператор $\varphi \in Hom_k(V,V)$ определяет две матрицы:

$\varphi e_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j$ или $Ae_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j$ и

$\varphi e'_i = \sum_{j=1}^{n} a'_{ji} e'_j$ или $A' e'_i = \sum_{j=1}^{n} a'_{ji} e'_j$. (В матричном варианте под вектором e_i понимаем столбец (0, …, 1, … 0)^t – единица на i-том месте)

Через T обозначим матрицу перехода от базиса $e_1,...,e_n$ к базису $e'_1,...,e'_n$. Пусть $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i$ два представления вектора $x \in V$ в двух различных базисах. Тогда

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = AX, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = AX.$$

Кроме того, в силу параграфа 2 главы 1 $X = TX'$, $Y = TY'$ (т.к. Y и Y' координаты одного и того же вектора $y = \varphi(x)$). Поэтому $ATX' = AX = Y = TY' = TA'X'$. Т.к. X' - произвольный столбец, то $AT = TA'$ или $A' = T^{-1}AT$.

Матрицы A и A', связанные последним соотношением, принято называть подобными матрицами. Нами доказана

Теорема 2.9. *Матрицы линейного оператора, заданные в разных базисах, подобны.*

Пример. Матрица линейного оператора в базисе e_1, e_2, e_3 имеет вид: $\begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Найти матрицу этого оператора в базисе

$e'_1 = e_1 - e_2 + e_3$, $e'_2 = 2e_1 - e_2 + 3e_3$, $e'_3 = 3e_1 + e_2 + 6e_3$.

Для вычисления произведения $T^{-1}A_\varphi$ отметим, что матрицу T^{-1} можно рассматривать как произведение элементарных матриц, возникающих при приведении матрицы T к единичной. Поэтому, выполняя с матрицей A_φ те же элементарные преобразования в том же порядке, которые производятся с матрицей T получим $T^{-1}A_\varphi$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & -2 \\ -1 & -1 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -5 & -6 & 3 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & -9 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -17 & -22 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -26 & -33 & 15 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & -9 & 4 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 35 & 44 & -20 \\ 0 & 1 & 0 & -26 & -33 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 9 & -4 \end{array}\right].$$

Вычисляя произведение матрицы $T^{-1}A_\varphi = \begin{bmatrix} 35 & 44 & -20 \\ -26 & -33 & 15 \\ 7 & 9 & -4 \end{bmatrix}$ и матрицы T, получим что оператор φ в базисе e'_1, e'_2, e'_3, действует следующим образом: $\varphi(e'_1) = -29e'_1 + 22e'_2 - 6e'_3$, $\varphi(e'_2) = -34e'_1 + 26e'_2 - 7e'_3$, $\varphi(e'_3) = 29e'_1 - 21e'_2 + 6e'_3$.

3. Алгебра линейных операторов

Введенная ранее алгебра квадратных матриц $M_n(k)$ с коэффициентами из поля k может быть описана как алгебра линейных операторов n-мерного векторного пространства.

Множество $Hom_k(V, V)$ в дальнейшем будем обозначать $End_k(V)$ или $End(V)$. Зададим на $End(V)$ операции сложения, умножения и умножения на элементы из k. Пусть $\varphi, \psi \in End(V), \alpha \in k$, тогда:

$$(\varphi+\psi)(x)=\varphi(x)+\psi(x),\ (\varphi\psi)(x)=\varphi(\psi(x)),\ (\alpha\varphi)(x)=\alpha(\varphi(x)),\text{ где } x\in V.$$

Легко проверить, что относительно сложения и умножения на скаляр множество $End(V)$ удовлетворяет всем аксиомам векторного пространства, а операция умножения отображений ассоциативна $(\varphi\psi)\chi=\varphi(\psi\chi)$ и связана с операциями сложения законами дистрибутивности $\varphi(\psi+\chi)=\varphi\psi+\varphi\chi$, $(\psi+\varphi)\chi=\psi\chi+\varphi\chi$ и $(\lambda\varphi)\psi=\lambda(\varphi\psi)=\varphi(\lambda\psi)$ $\lambda\in k$. Перечисленные факты означают, что $End(V)$ является ассоциативной алгеброй над полем k или k-алгеброй.

Для того чтобы описать отождествление алгебр $End(V)$ и $M_n(k)$, введем понятие изоморфизма алгебр.

Определение 3.1. *Говорят, что k-алгебры A и B изоморфны, если существует биекция* φ *алгебры A на алгебру B такая, что для* $\forall a_1,a_2\in A$, $\forall\alpha_1,\alpha_2\in k$

$$\varphi(\alpha_1a_1+\alpha_2a_2)=\alpha_1\varphi(a_1)+\alpha_2\varphi(a_2),\ \varphi(a_1a_2)=\varphi(a_1)\varphi(a_2).\ (1).$$

Теорема 3.1. *Пусть* $V=<e_1,...,e_n>$ *- линейное пространство над полем k с фиксированным базисом. Тогда отображение* $\varphi\to A_\varphi$ *задает изоморфизм k-алгебр* $End(V)$ и $M_n(k)$.

Доказательство. В силу теоремы 2.1. отображение $\varphi\to A_\varphi$ является биекцией k-алгебр $End(V)$ и $M_n(k)$. Для проверки соотношений (1) заметим, что n-мерное пространство V изоморфно пространству строк (или столбцов) длины n. Поэтому, отождествляя вектора $x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$ и $x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, можем записать, что $\varphi(x)=A_\varphi x$, где

$$\varphi(x)=\varphi\left(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{j=1}^{n}a_{ji}e_j=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ji}x_i\right)e_j,$$

$$A_\varphi x = A_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \; y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i$$

(здесь $A_\varphi = (a_{rs})$). Тогда $A_{\varphi+\psi}(x) = (\varphi+\psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x) = A_\varphi(x) + A_\psi(x)$, $\forall x \in V$, $\varphi + \psi \to A_\varphi + A_\psi$. Соответственно, $A_{\lambda\varphi}(x) = (\lambda\varphi)(x) = \lambda(\varphi(x)) = \lambda A_\varphi(x)$, $\forall x \in V$, т.е. $\lambda\varphi \to \lambda A_\varphi$.

Наконец,

$$A_{\varphi\psi}(x) = (\varphi\psi)(x) = \varphi(\psi(x)) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji} x_i e_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji} x_i \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji} x_i \sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{kj} b_{ji}\right) x_i\right) e_k = A_\varphi A_\psi(x),\; \forall x \in V \text{ (здесь } A_\psi = (b_{rs})\text{), т.е. } \varphi\psi \to A_\varphi A_\psi.$$

4. Инвариантные подпространства и собственные векторы

Определение 4.1. *Подпространство U пространства V называется инвариантным относительно оператора $\varphi \in End(V)$, если $\varphi U \subseteq U$. Обозначим через $\phi|_U$ ограничение линейного оператора ϕ на подпространство U, а через $A_{\phi|_U}$ его матрицу.*

Если $e_1, ..., e_m$ базис пространства U, то, дополняя его до базиса $e_1, ..., e_m, ..., e_n$ пространства V, получим, что матрица A_φ линейного оператора φ в этом базисе имеет вид:

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} A_u & C \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

где $A_u = A_{\varphi|_U} = \begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1m} \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1} \dots a_{mm} \end{bmatrix}$ - матрица ограничения линейного оператора φ на подпространство U, а C, B - некоторые матрицы с коэффициентами из k размеров $m \times (n-m)$ и $(n-m)\times(n-m)$ соответственно.

Если у инвариантного подпространства U существует дополнительное инвариантное подпространство W, т.е $V = U \oplus W$ и $\varphi W \subseteq W$, то матрица оператора $\varphi \in End(V)$ имеет вид:

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} A_u & 0 \\ 0 & A_w \end{bmatrix},$$

где $A_u = \begin{bmatrix} a_{11} \dots a_{1m} \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1} \dots a_{mm} \end{bmatrix}$ и $A_w = \begin{bmatrix} a_{m+1,m+1} \dots a_{m+1,n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n,m+1} \dots a_{n,n} \end{bmatrix}$ - матрицы ограничения линейного оператора φ на подпространства U и W. В этом случае говорят о прямой сумме операторов $\varphi = \varphi_u \oplus \varphi_w$ и прямой сумме матриц $A = A_u \oplus A_w$, соответствующих разложению $V = U \oplus W$ в прямую сумму подпространств.

Матрица линейного оператора приобретает совсем простой вид (является диагональной), если найдутся n одномерных инвариантных подпространств U_i таких, что $V = \bigoplus_{i=1}^{n} U_i$, $n = \dim V$.

Такие подпространства выделяются специальным определением.

Определение 4.2. *Вектор* $v \in V, v \neq 0$ *называется собственным вектором оператора* $\varphi \in End_k(V)$, *если для некоторого* $\lambda \in k$ *выполняется соотношение* $\varphi v = \lambda v$. *Скаляр* λ *называют собственным значением оператора* φ.

Зафиксируем некоторый базис $e_1 \ldots e_n$ пространства V. Пусть $A_\varphi = \begin{bmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{bmatrix}$ матрица оператора φ в этом базисе, а $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ - разложение вектора v по этому базису. Тогда, используя отождествление вектора $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, со столбцами $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, из его координат, условие $\varphi v = \lambda_0 v, \lambda_0 \in k$ можно переписать как $A_\varphi v = \lambda_0 v$ или $(A_\varphi - \lambda_0 E)v = 0$, где E - единичная матрица. В координатной форме последнее соотношение приобретает вид:

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_0 0 \ldots 0 \\ 0 \lambda_0 \ldots 0 \\ 00 \ldots \lambda_0 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

Или

$$\begin{array}{l} (a_{11} - \lambda_0)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda_0)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda_0)x_n = 0 \end{array}. \qquad (1)$$

Так как $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \neq 0$, т.е. система имеет ненулевое решение, то $|A_\varphi - \lambda_0 E| = 0$. Уравнение $|A_\varphi - \lambda\, E| = 0$ называют характеристическим уравнением оператора φ, а многочлен $|A_\varphi - \lambda E|$ называется характеристическим многочленом. Полученный факт означает, что собственное значение любого линейного оператора является корнем его характеристического многочлена (или для краткости – характеристическим корнем).

Обратно, пусть λ_0 - характеристический корень оператора φ, то есть $\left|A_\varphi - \lambda_0 E\right| = 0$. Тогда система (1) имеет ненулевое решение $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \neq 0$. Переходя к матричной форме, получим $A_\varphi v = \lambda_0 v$.

Если $e'_1, ..., e'_n$ другой базис пространства V, а T - матрица перехода от первого базиса ко второму, то матрица A'_φ линейного оператора φ в новом базисе, как было отмечено ранее, выражается через A_φ формулой: $A'_\varphi = T^{-1} A_\varphi T$. Тогда $\left|A'_\varphi - \lambda E\right| = \left|T^{-1} A_\varphi T - T^{-1} \lambda E T\right| = \left|T^{-1}\right| \left|A_\varphi - \lambda E\right| \left|T\right| = \left|A_\varphi - \lambda E\right|$, то есть характеристические многочлены подобных матриц совпадают и приведенное выше определение характеристического многочлена линейного оператора корректно. Приведенные рассуждения доказывают следующее утверждение:

Предложение 4.1. *Пусть $\phi \in End_k(V)$. Тогда корни характеристического многочлена оператора ϕ, принадлежащие полю k, и только они являются собственными значениями этого оператора.*

Заметим, что существование собственного вектора существенно зависит от основного поля k. Например, если $k = R$ - поле действительных чисел, а φ - оператор поворота векторов из R^2 на угол $\alpha (\alpha \neq 0)$, то в этом случае собственных векторов у φ нет. Напротив, если $k = C$ - поле комплексных чисел, то характеристический многочлен в этом случае обязательно имеет корень, принадлежащий C. Поэтому система (1) имеет хотя бы одно ненулевое решение, то есть оператор φ имеет собственный вектор.

Рассмотрим одно достаточное условие, при выполнении которого матрица линейного оператора имеет диагональный вид.

Теорема 4.2. *Если оператор* $\varphi \in End_k(V)$ *имеет* $n = \dim_k V$ *различных собственных значений, принадлежащих полю* k*, то существует базис пространства* V*, в котором матрица* A_φ *этого оператора имеет вид:*

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} \lambda_1 0 ... 0 \\ 0 \lambda_2 ... 0 \\ 00 ... \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Как видно из предыдущих рассуждений, каждому собственному значению отвечает хотя бы один ненулевой собственный вектор. Поэтому для доказательства теоремы достаточно проверить, что набор из собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям, линейно независим.

Доказательство этого факта проведем индукцией по количеству векторов t в этом наборе.

При t=1 утверждение очевидно. Пусть оно справедливо при любых $t \le s$. Докажем его при t=s+1. Предположим противное, то есть для некоторого набора собственных векторов $v_1,...,v_{s+1}$ с собственными значениями $\lambda_1,...,\lambda_{s+1} \in k, \lambda_i \ne \lambda_j$, когда $i \ne j$, существует нетривиальная линейная зависимость: $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_{s+1} v_{s+1} = 0$. Применяя к этому соотношению оператор φ, получим $\alpha_1 \lambda_1 v_1 + ... + \alpha_{s+1} \lambda_{s+1} v_{s+1} = 0$. Умножая первое соотношение на λ_{s+1} и вычитая из него второе, получим $\alpha_1(\lambda_{s+1} - \lambda_1)v_1 + ... + \alpha_s(\lambda_{s+1} - \lambda_s)v_s = 0$. Из линейной независимости векторов $v_1,...,v_s$ и условий $\lambda_{s+1} - \lambda_i \ne 0, i = 1,...,s$ следует равенство нулю $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$. Тогда из соотношения $\sum_{i=1}^{s+1} \alpha_i v_i = 0$ получается, что и $\alpha_{s+1} = 0$, и мы приходим к противоречию с условием, что $(\alpha_1,...,\alpha_{s+1}) \ne (0,...,0)$.

5. Сопряженное (двойственное) пространство

Обозначим через V^* совокупность линейных функций на пространстве V, то есть используя введенные ранее обозначения $V^* = Hom_k(V,k)$. Введем операции сложения и умножения на константы для элементов из V^* по правилу: $(f+g)(v) = f(v) + g(v)$, $(\lambda f)(v) = \lambda f(v)$, $f,g \in V^*, \lambda \in k$, $v \in V$. Легко проверить, что относительно введенных операций множество V^* становится векторным пространством над полем k. Это пространство и называют сопряженным или двойственным к пространству V.

Теорема 5.1. *Пусть* V *конечномерное линейное пространство над полем* k. *Тогда* $\dim_k V^* = \dim_k V$.

Доказательство. Обозначим через n размерность пространства V. Зафиксируем некоторый базис $e_1,...,e_n$ этого пространства. Т.к. любая линейная функция однозначно определяется своими значениями на базисе , то рассмотрим набор функций $\lambda_i \in V^*, i = 1,...,n$, определенных условиями:

$$\lambda_i(e_j) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}.$$

Тогда любая функция $\lambda \in V^*$ выражается через функции $\lambda_i, i = 1,...,n$ по формуле $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda(e_i)\lambda_i$. Действительно, для любого вектора $v = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \in V$ имеем

$$\lambda(v) = \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda(e_i),$$

$$(\sum_{j=1}^{n} \lambda(e_j)\lambda_j)(v) = \sum_{j=1}^{n} \lambda(e_j)\lambda_j(v) = \sum_{j=1}^{n} \lambda(e_j)\sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_j(e_i) = \sum_{j=1}^{n} \lambda(e_j)a_j.$$

То есть значения функций λ и $\sum_{j=1}^{n}\lambda(e_j)\lambda_j$ на любом векторе совпадают, следовательно

$$\lambda=\sum_{j=1}^{n}\lambda(e_j)\lambda_j .$$

Проверим линейную независимость функций $\lambda_i, i=1,...,n$. Если $\sum_{i=1}^{n}a_i\lambda_i=0$, то, вычисляя значение левой и правой части нашего равенства на векторе e_j, имеем $a_j=0, j=1,...,n$. Итак, функции $\lambda_i, i=1,...,n$ образуют базис V^*, то есть $\dim_k V^*=\dim_k V$.

Само название пространства V^*, двойственного к V и двойственных базисов $e_1,...,e_n,\lambda_1,...,\lambda_n$ связано "двусторонней симметрией" между V и V^*. Условимся временно вместо $f(x)$ писать (f,x). Тем самым определено отображение $V^*\times V\to k$, линейное по каждому аргументу:

$$(\alpha f+\beta g,x)=\alpha(f,x)+\beta(g,x),$$

$$(f,\alpha x+\beta y)=\alpha(f,x)+\beta(g,y), f,g\in V^*, x,y\in V, \alpha,\beta\in k .$$

Отображения $V\times W\to k$ с указанными свойствами принято называть билинейными. Пользуясь двойственными базисами и представляя через них элементы $x=\alpha_1e_1+...+\alpha_ne_n$, $f=\beta_1\lambda_1+...+\beta_n\lambda_n$, легко вычислить значение

$$f(x)=(f,x)=\alpha_1\beta_1+...+\alpha_n\beta_n.$$

Рассмотрим одну конструкцию, связанную с линейными операторами в двойственном пространстве. При любом фиксированном элементе $f\in V^*$ и $\varphi\in End_k(V)$ отображение $x\to(f,\varphi x), \varphi\in End_k(V)$ снова является элементом из V^*, то есть линейной функцией:

$$(f,\varphi(\alpha x+\beta y))=(f,\alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y))=\alpha(f,\varphi(x))+\beta(f,\varphi(y)).$$

Раз это так, то мы можем определить линейную функцию $\varphi^* f$ на V полагая

$$(\varphi^* f, x) \underset{def}{=} (f, \varphi x). \qquad (5.1)$$

Соответствие $\varphi^* : f \to \varphi^* f$ при переменной f определяет линейное отображение $V^* \to V^*$:

$$(\varphi^*(\alpha f + \beta g), x) = (\alpha f + \beta g, \varphi(x)) =$$

$$= \alpha(f, \varphi(x)) + \beta(g, \varphi(x)) = \alpha(\varphi^* f, x) + \beta(\varphi^* g, x) = = (\alpha\varphi^* f + \beta\varphi^* g, x)$$

т.е. $\varphi^*(\alpha f + \beta g) = \alpha\varphi^*(f) + \beta\varphi^*(g)$. Так что $\varphi^* \in End_k(V^*)$.

Определение 5.1. *Линейный оператор φ^* на V^*, заданный соотношением (5.1), называют оператором, сопряженным к $\varphi \in End_k(V)$.*

Непосредственно из определения, легко вывести следующие свойства отображения $* : \varphi \to \varphi^*$: $0^* = 0$, $1^* = 1$, $(\alpha\varphi)^* = \alpha\varphi^*$, $(\varphi + \psi)^* = \varphi^* + \psi^*$, $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^*$, $\varphi, \psi \in End_k(V), \alpha \in k$.

Например, последнее соотношение доказывается так: $((\varphi\psi)^* f, x) = (f, (\varphi\psi)x) = (f, \varphi(\psi x) = (\varphi^* f, \psi x) = (\psi^*\varphi^* f, x)$.

Чтобы задать оператор φ^* в матричном виде, естественно выбрать в V и V^* двойственные базисы $\{e_i\}$, $\{\lambda_i\}$. Если $\varphi e_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k$, то

$$(\lambda_i, \varphi e_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} (\lambda_i e_k) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \delta_{ik} = a_{ij} .$$

Положив далее $\varphi^* \lambda_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^* \lambda_k$, будем иметь $(\varphi^* \lambda_i, e_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^* (\lambda_k, e_j) = a_{ji}^*$. Т.к. в соответствии с (5.1) $(\varphi^* \lambda_i, e_j) = (\lambda_i, \varphi e_j) = a_{ij}$, то $a_{ji}^* = a_{ij}$. Следовательно, верна

Теорема 5.2. *Если в базисе $\{e_i\}$ пространства V линейный оператор φ имеет матрицу $A_\varphi = A = (a_{ij})$, то в дуальном базисе $\{\lambda_i\}$ про-*

странства V^* *сопряженный оператор* φ^* *имеет транспонированную матрицу* $A^t = A_{\varphi^*} = A^* = (a_{ij}^*)$.

Содержательным примером использования понятия сопряженного оператора является следующее утверждение.

Теорема 5.3. *Всякий комплексный линейный оператор* $\varphi \in End_C(V)$ *на конечномерном векторном пространстве V обладает инвариантной гиперплоскостью (или* $(n-1)$*-мерным-инвариантным подпространством).*

Доказательство. Пусть $\dim_C V = n$. Для любой ненулевой линейной функции f на V, $\dim_k Kerf = n-1$. Из замечания к теореме 4.1 следует, что у комплексного линейного оператора обязательно есть хотя бы один собственный вектор. Пусть $f \in V^*$ собственный вектор оператора φ^*, отвечающий собственному значению λ. Тогда, используя определяющее соотношение (5.1), для любого вектора $x \in Kerf$ имеем: $0 = \lambda(f,x) = (\lambda f, x) = (\varphi^* f, x) = (f, \varphi(x))$, т.е. $\varphi(x) \in Kerf$. Это означает, что $Kerf$ — инвариантное подпространство. Теорема доказана.

6. Триангулизация линейного оператора и теорема Гамильтона-Кэли

Триангулизацией линейного оператора называют выбор такого базиса в пространстве, где действует этот оператор, что матрица оператора имеет треугольный вид. Т.е. все элементы матрицы, расположенные выше или ниже главной диагонали, нулевые.

Теорема 6.1. *Для любого линейного оператора* $\varphi \in End_C(V)$*, действующего в конечномерном комплексном пространстве V существует базис, в котором матрица оператора* A_φ *имеет треугольный вид.*

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по размерности пространства V. Если $\dim_C V = 1$, то утверждение тривиально. Предположим, что теорема справедлива для любого пространства V, размерность которого $< n$, и рассмотрим пространство V, $\dim_C V = n$. По теореме 5.3 в пространстве V существует подпространство U, $\dim_c U = n-1$ и $\varphi U \subseteq U$. По предположению индукции в подпространстве U существует базис $v_2, ..., v_n$ такой, что матрица ограничения линейного оператора $\overline{\varphi}$ на подпространстве U имеет вид:

$$A_{\overline{\varphi}} = \begin{bmatrix} a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

т.е. $\varphi v_i = a_{ii} v_i + \sum_{j=i+1}^{n} a_{ji} v_j$, $i = 2, ..., n$. Дополним базис подпространства U до базиса $V : v_1, v_2, ..., v_n$. Т.к. $\varphi v_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{j1} v_j$, то матрица оператора A_φ равна

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Теорема доказана.

Т.к. характеристический многочлен $|A - \lambda E|$ треугольной матрицы равен $\prod_{i=1}^{n} (a_{ii} - \lambda)$, то диагональные элементы a_{ii} этой матрицы совпадают с корнями характеристического многочлена.

Обозначим через $\chi_A(\lambda)$ характеристический многочлен матрицы A, а через $\chi_\varphi(\lambda)$ характеристический многочлен оператора φ.

Теорема 6.2. (Гамильтона-Кэли) *Линейный оператор* φ *(и соответствующая ему матрица) аннулирует свой характеристический многочлен* $\chi_\varphi(\lambda)$*, т.е.* $\chi_\varphi(\varphi)=0$ *(соответственно,* $\chi_A(A)=0$*).*

Доказательство. В силу теоремы 6.1 в пространстве V существует базис $v_1,...,v_n$, $n=\dim_k V$, что $\varphi v_i=\lambda_i v_i+\sum_{j=i+1}^{n} a_{ji}v_j$, $i=1,...,n$, где $\lambda_i, i=1,...,n$ собственные значения оператора φ. Обозначим через $V_i=<v_i,...,v_n>, i=1,...,n$ линейную оболочку соответствующих $n-i+1$ вектора. Тогда $(\varphi-\lambda_i E)V_i\subseteq V_{i+1}$, $i=1,...,n$, где полагаем, $V_{n+1}=0$, E - тождественный оператор.

Т.к. $\chi_\varphi(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i)$, то

$$\chi_\varphi(\varphi)V=\left(\prod_{i=1}^{n}(\varphi-\lambda_i E)\right)V=(\varphi-\lambda_n E)...(\varphi-\lambda_1 E)V_1\subset\subset(\varphi-\lambda_n E)...(\varphi-\lambda_2 E)V_2\subseteq$$
$$...\subseteq(\varphi-\lambda_n E)V_n=0.$$

Т.е. $\chi_\varphi(\varphi)=0$. Теорема доказана.

7. Факторпространства и фактороператоры

Для любого подпространства U в пространстве V дополнительное подпространство W такое, что $V=U\oplus W$ определяется неоднозначно. Но все они естественным образом изоморфны одному пространству, которое однозначно определяется по U и V.

Множество $x+U=\{x+y, y\in U\}$ называется смежным классом, вектор x - представителем этого смежного класса. Если $0\neq z\in(x+U)\cap(x'+U)$, то $z=x+y=x'+y'$, $y,y'\in U$. Поэтому $x=x'+y'-y\in x'+U$, т.е. $x+U\subset x'+U$. Аналогично $x'=x+y-y'\in x+U$, т.е. $x'+U\subset x+U$. Следовательно, $x+U=x'+U$. Итак, два смежных класса либо не пересекаются, либо совпадают. При фиксированном U положим $\bar{x} = x + U$. Каждый вектор v из V принадлежит ровно одному смежному классу. Обозначим через $\bar{V} = V/U$ множество всех классов $\{v + U, v \in V\}$. На этом множестве можно ввести структуру векторного пространства следующим образом: $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$ или $(x+U)+(y+U)=(x+y)+U$ $\alpha\bar{x} = \overline{\alpha x}$ или $\alpha(x+U) = \alpha x + U$, $x, y \in V$, $\alpha \in k$.

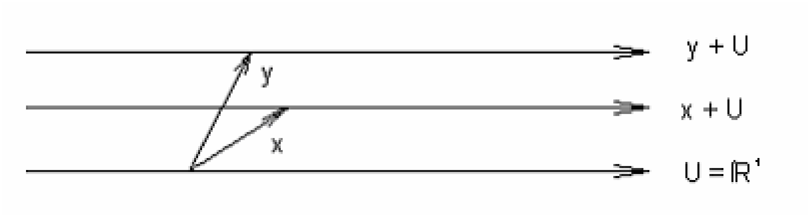
Проверим корректность этих определений. Пусть $x + U = x' + U$, $y + U = y' + U$. Тогда

$$(x' + U) + (y' + U) = (x' + y') + U.$$

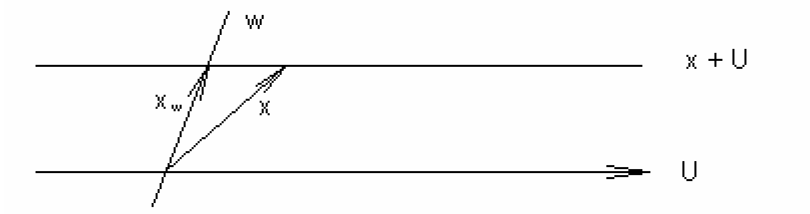
Но $x' = x + u$, $y' = y + \tilde{u}$, т.е. $(x' + y') + U = x + y + u + \tilde{u} + U = x + y + U$. Аналогично: $\alpha(x' + U) = \alpha x' + U = \alpha(x + u) + U = \alpha x + U$.

Выполнимость условий коммутативности и ассоциативности сложения в $\bar{V}$, а также ассоциативности и дистрибутивности умножения легко следует из соответствующих условий для представителей в пространстве V. Нейтральным элементом в множестве $\bar{V}$ является класс $0 + U = U$, а противоположным для $x + U$ будет $-x + U$. Таким образом, все аксиомы векторного пространства в $\bar{V}$ выполнены. Это пространство и принято называть факторпространством пространства V по подпространству U.

Пример. Пусть $V = R^2$, $U = R^1$. Тогда каждый класс $x + R^1$ есть совокупность векторов, концы которых лежат на прямой параллельной прямой $U = R^1$. Т.е.



Если $W = R^1$ некоторое дополнительное подпространство в R^2, то пересечение прямых $x + U$ и W определяет вектор x_w, который можно взять в качестве представителя класса $x + U$.



Тогда соответствие $x_w \to x_w + U$ определяет изоморфизм между подпространством W и факторпространством V/U.

Обобщением этого примера является следующая

Теорема 7.1. *Пусть $V = U \oplus W$ - прямая сумма подпространств $U, W \subset V$. Тогда отображение $\varphi : w \to w + U$ является изоморфизмом между пространствами W и V/U.*

Доказательство. Во-первых, отметим, что φ — линейное отображение. Действительно,

$$\varphi(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = (\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) + U = (\alpha_1 w_1 + U) + (\alpha_2 w_2 + U) =$$
$$= \alpha_1 (w_1 + U) + \alpha_2 (w_2 + U) = \alpha_1 \varphi(w_1) + \alpha_2 \varphi(w_2).$$

Во-вторых, φ-сюрьекция. Ибо для любого класса $v + U \in V/U$ имеем: $v + U = (w + u) + U = w + U$, где $w + u$ - разложение вектора v. Следовательно, $\varphi(w) = w + U = v + U$.

Наконец, если $\varphi(w) = 0$, то $w + U = U$, т.е. $w \in U$. Но $W \cap U = 0$ и потому $w = 0$. Это доказывает, что отображение φ инъективно.

Линейность и биективность φ означает, что φ - изоморфизм.

Следствие 7.1. $\dim V/U = \dim V - \dim U$.

Доказательство. По теореме 7.4 главы 1 для подпространства U в пространстве V существует дополнительное подпространство W такое, что $V = U \oplus W$. Тогда $\dim W = \dim V - \dim U$. Но, по доказанной теореме, $W \cong V/U$. Следовательно, $\dim V/U = \dim W = \dim V - \dim U$.

Пусть $\varphi \in End_k V$, U - инвариантное относительно оператора φ подпространство в V. Определим фактороператор $\overline{\varphi} \in End_k V/U$ по формуле: $\overline{\varphi}(v+U) = \varphi v + U$ или $\overline{\varphi}(\overline{v}) = \overline{\varphi(v)}$. Если $v' + U = v + U$, то $\overline{\varphi}(v' + U) = \varphi v' + U$. Но $v' = v + u$, значит $\varphi v' = \varphi v + \varphi u$. Поэтому, $\overline{\varphi}(v' + U) = \varphi v + \varphi u + U = \varphi v + U$. Это доказывает корректность определения фактороператора.

Зафиксируем в подпространстве U некоторый базис $e_1,...,e_m$ и дополним его до базиса $e_1,...,e_m,...,e_n$ всего пространства. Тогда $V = U \oplus W$, где $U = \langle e_1,...,e_m \rangle$, $W = \langle e_{m+1},...,e_n \rangle$. Так как $W \cong V/U$, то $\overline{e}_{m+1} = e_{m+1} + U,...,\overline{e}_n = e_n + U$ - базис факторпространства. Из определения фактороператора получаем:

$$\overline{\varphi}\ \overline{e}_j = \overline{\varphi e_j} = \overline{\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i} = \sum_{i=m+1}^{n} a_{ij} \overline{e}_i\ .$$

Следовательно, матрица A_φ этого линейного оператора в базисе $e_1,...,e_n$ представляется в виде: $\begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$, где A_1 - матрица ограничения оператора φ на подпространство U, A_2 - матрица фактороператора $\overline{\varphi}$, действующего в факторпространстве V/U. Используя вид матрицы A_φ, имеем: $|A_\varphi - \lambda E| = |A_1 - \lambda E_1||A_2 - \lambda E_2|$, где E_i - единичные матрицы размеров $m \times m$ и $(n-m)\times(n-m)$. Таким образом, характеристический многочлен оператора φ равен произведению характеристического многочлена ограничения этого оператора на подпространство U и характеристического многочлена фактороператора.

8. Корневое подпространство

Определение 8.1. *Множество векторов* $V_\lambda = \{v \in V,\ (\varphi-\lambda)^s v = 0$ *для некоторого* $s\}$ *называется корневым подпространством оператора* $\varphi \in End_k(V)$, *соответствующим характеристическому корню* $\lambda \in k$. *(Здесь и ниже:* $\varphi - \lambda = \varphi - \lambda \cdot E$*)*

В том, что V_λ – подпространство нас убеждает легкая проверка. Если, например, $u, v \in V_\lambda$, причем $(\varphi-\lambda)^s u = 0$, $(\varphi-\lambda)^r v = 0$, $t = \max(s,r)$, то $(\varphi-\lambda)^t(\alpha u + \beta v) = \alpha(\varphi-\lambda)^t u + \beta(\varphi-\lambda)^t v = 0$.

Откуда $\alpha u + \beta v \in V_\lambda$ при любых $\alpha, \beta, \in k$. Заметим, что $V_\lambda \neq 0$, так как собственные векторы оператора φ, отвечающие собственному значению $\lambda \in k$, принадлежат V_λ. Если размерность пространства V равна n, то, как следует из определения V_λ, характеристический многочлен $f_{\varphi|_{V_\lambda}}$ ограничения $\varphi|_{V_\lambda}$ оператора φ на подпространстве V_λ равен $(x-\lambda)^r, r = \dim_k V_\lambda \leq n$. Действительно, если $\dim V_\lambda = 1$, то $V_\lambda = V_{\lambda,1} = \{v, (\varphi-\lambda)v = 0\}$ и характеристический многочлен $f_{\varphi|_{V_\lambda}}(x)$ ограничения оператора φ на подпространство V_λ равен $x - \lambda$. Пусть для корневых пространств размерности меньшей чем r утверждение справедливо и рассмотрим корневое подпространство $V_\lambda, \dim V_\lambda = r$. Так как подпространство собственных векторов $V_{\lambda,1}$ инвариантно относительно φ, то можно определить фактороператор $\overline{\varphi}$ на факторпространстве $\overline{V} = V / V_{\lambda,1}$. Тогда подпространство $\overline{V_\lambda} = V_\lambda / V_{\lambda,1}$ в $\overline{V}$ совпадает с корневым подпространством оператора $\overline{\varphi}$, отвечающим значению λ. Действительно, по определению

$$\overline{V_\lambda} = \{\overline{v} = v + V_{\lambda,1}, v \in V_\lambda\} = \{\overline{v}, (\varphi-\lambda)^t v = 0\}.$$

Поэтому $\overline{V_\lambda} \subset \{\overline{v} \in \overline{V} \mid (\overline{\varphi}-\lambda)^t \overline{v} = \overline{0}\} = \overline{V}_\lambda(\overline{\varphi})$. С другой стороны, из соотношения $(\overline{\varphi}-\lambda)^t \overline{v} = \overline{0}$ следует, что $(\varphi-\lambda)^t v \in V_{\lambda,1}$, то есть

$(\varphi-\lambda)^{t+1}v=0$, и значит $\overline{V}_\lambda(\overline{\varphi})\subset\overline{V}_\lambda$. Так как $\dim\overline{V}_\lambda<\dim V_\lambda=r$, то, по предположению индукции, характеристический многочлен $f_{\overline{\varphi}|_{\overline{V}_\lambda}}(x)$ ограничения фактороператора $\overline{\varphi}$ на подпространство $\overline{V}_\lambda=\overline{V}_\lambda(\overline{\varphi})$ равен $(x-\lambda)^s, s=\dim\overline{V}_\lambda$. Используя замечание из конца предыдущего параграфа, имеем: $f_{\varphi|_{V_\lambda}}(x)=f_{\overline{\varphi}|_{\overline{V}_\lambda}}(x)$ $f_{\varphi|V_\lambda}(x)=(x-\lambda)^q(x-\lambda)^s, q=\dim V_{\lambda,1}, s=\dim V_\lambda/V_{\lambda,1}=r-q$. То есть $f_{\varphi|_{V_\lambda}}(x)=(x-\lambda)^r$. В частности, $V_\lambda=\{v\in V,(\varphi-\lambda)^r v=0\}$.

Из доказанного результата следует, что $V_\lambda=\{v\in V,\ (\varphi-\lambda)^n\ (v)=0\}$, $n=\dim V$. Действительно, $\{v\in\ V,\ (\varphi-\lambda)^r\ (v)=0,\ r=\dim V_\lambda\}\subset\{v\in\ V,\ (\varphi-\lambda)^n\ (v)=0,\ n=\dim V\}\subseteq V_\lambda$.

Теорема 8.1. *Пусть* $\varphi\in End_C(V), \dim_C V=n$ *и* $f_\varphi(x)=\prod_{i=1}^{s}(x-\lambda_i)^{n_i}, \lambda_i\neq\lambda_j, i\neq j$ *- характеристический многочлен оператора* φ. *Тогда* $V=V_{\lambda_1}\oplus\ldots\oplus V_{\lambda_s}$ *- прямая сумма корневых подпространств* V_{λ_i}, *причем* $\dim_C V_{\lambda_i}=n_i$.

Доказательство. Ни один из множителей $(x-\lambda_i)$ не может быть делителем одновременно всех многочленов $f_i(x)=\prod_{j\neq i}(x-\lambda_j)^{n_j}, i=1,\ldots,s$, и поэтому $HOD(f_1(x),\ldots,f_s(x))=1$. Найдутся, стало быть, многочлены $h_1(x),\ldots,h_s(x)\in C[x]$, для которых

$$\sum_{i=1}^{s}f_i(x)h_i(x)=1 \qquad (8.1).$$

Подпространства $W_i=f_i(\varphi)h_i(\varphi)V=\{f_i(\varphi)h_i(\varphi)v, v\in V\}, i=1,\ldots,s$ инвариантны относительно φ: $\varphi W_i=\varphi f_i(\varphi)h_i(\varphi)V=f_i(\varphi)h_i(\varphi)\varphi V\subseteq f_i(\varphi)h_i(\varphi)V=W_i$. Кроме того, $(\varphi-\lambda_i E)^{n_i}W_i=f_\varphi(\varphi)h_i(\varphi)V=0$, так как по теореме Гамильтона-Кэли $f_\varphi(\varphi)V=0$. Поэтому

$$W_i \subset V_{\lambda_i} \tag{8.2}$$

Подставляя в соотношении (8.1) вместо переменной x оператор φ, получим:

$$E = \sum_{i=1}^{s} f_i(\varphi) h_i(\varphi).$$

Тогда $V = \left(\sum_{i=1}^{s} f_i(\varphi) h_i(\varphi) \right) V = \sum_{i=1}^{s} W_i$. Ввиду включения (8.2) имеем: $V = \sum_{i=1}^{s} V_{\lambda_i}$.

Обозначим через $V_i = \sum_{i \neq j} V_{\lambda_j}$. Если $v \in V_{\lambda_i} \cap V_i$, то $(\varphi - \lambda_i E)^n v = 0$. А так как $v = \sum_{i \neq j} v_j$, $v_j \in V_{\lambda_j}$ и $(\varphi - \lambda_j E)^n v_j = 0$, то и $\left(\prod_{i \neq j} (\varphi - \lambda_j E)^n \right) v = 0$.

Из взаимной простоты многочленов $(x - \lambda_i)^n$ и $c(x) = \prod_{i \neq j} (x - \lambda_j)^n$ следует существование многочленов $a(x)$ и $b(x)$, для которых $a(x)(x - \lambda_i)^n + b(x)c(x) = 1$.

Используя это соотношение, имеем: $v = a(\varphi)(\varphi - \lambda_i E)^n v + b(\varphi) \prod_{i \neq j} (\varphi - \lambda_j E)^n v = 0$, то есть пространства V_{λ_i} и $V_i = \sum_{j \neq i} V_{\lambda_j}$ не пересекаются. Значит, $V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_s}$.

В базисе, являющемся объединением базисов пространств V_{λ_i}, оператор φ имеет матрицу

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_s \end{bmatrix},$$

где A_i - матрица порядка $n_i' = \dim V_{\lambda_i}$ с единственным собственным значением λ_i и характеристическим многочленом $f_{A_i}(x) = (x - \lambda_i)^{n_i'}$.

Поэтому $f_\varphi(x)=f_{A_\varphi}(x)=\prod_{i=1}^{s}(x-\lambda_i)^{n_i'}$. С другой стороны, по условию $f_\varphi(x)=\prod_{i=1}^{s}(x-\lambda_i)^{n_i}$. Следовательно, $n_i'=n_i, i=1,...,s$.

Итак, мы доказали, что пространство V есть прямая сумма корневых подпространств V_{λ_i} оператора φ и размерность каждого корневого подпространства V_{λ_i} равна кратности характеристического корня λ_i.

9. Жорданова нормальная форма

Определение 9.1. *Матрица, имеющая вид:*

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & A_s \end{bmatrix}, \text{ где } A_i=\begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

или $A_i=[\lambda_i]$, называется жордановой.

Если $A=A_\varphi$ - матрица некоторого линейного оператора φ, то базис в котором его матрица A_φ имеет вышеприведенный вид, называется жордановым базисом.

Теорема 9.1. *Пусть* $\varphi\in End_k(V)$*, и все его характеристические корни* $\lambda_1,...,\lambda_s$ *принадлежат полю* k*. Тогда в пространстве V существует жорданов базис оператора* φ*, т.е. базис, в котором его матрица* A_φ *- жорданова.*

`Доказательство.` Теорема 8.1. позволяет свести ситуацию к рассмотрению оператора с единственным собственным значением, то есть к корневому пространству. Заменяя оператор φ на $\varphi-\lambda_i E$, получим, что достаточно рассмотреть корневое пространство, отвечающее нулевому собственному значению.

Если жорданов базис $e_1,...,e_n$ уже построен, то действие оператора φ (в силу определения 9.1) имеет вид:

$$\begin{array}{cccc}
\varphi e_1 = e_2 & \varphi e_{\kappa+1} = e_{\kappa+2} & \cdots & \varphi e_{r+1} = e_{r+2} \\
\varphi e_2 = e_3 & \varphi e_{\kappa+2} = e_{\kappa+3} & \cdots & \varphi e_{r+2} = e_{r+3} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\varphi e_{\kappa-1} = e_{\kappa} & \varphi e_{\kappa+s-1} = e_{\kappa+s} & \cdots & \varphi e_{r+t-1} = e_n \\
\varphi e_{\kappa} = 0 & \varphi e_{\kappa+s} = 0 & \cdots & \varphi e_n = 0
\end{array}$$

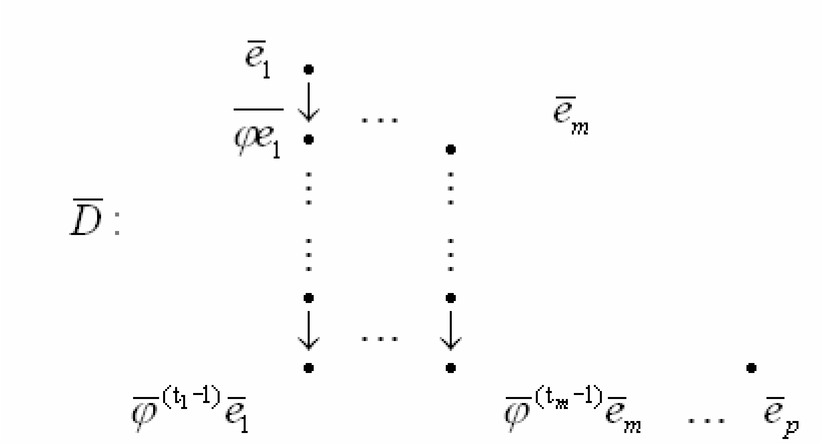
То есть базис разбивается на несколько групп, в каждой из которых оператор φ переводит вектор e_i кроме последнего в следующий вектор e_{i+1}, а последний вектор каждой группы в нулевой. Изобразим эту ситуацию следующей диаграммой:

$$D:\ \begin{array}{cccccc}
\bullet & \bullet & & & & \\
\downarrow & \downarrow & \cdots & & & \\
\bullet & \bullet & & \bullet & & \\
\downarrow & \downarrow & & \downarrow & \cdots & \\
\bullet & \bullet & & \bullet & & \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \\
\bullet & \bullet & & \bullet & & \bullet \\
\downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\bullet & \bullet & & \bullet & & \bullet
\end{array}.$$

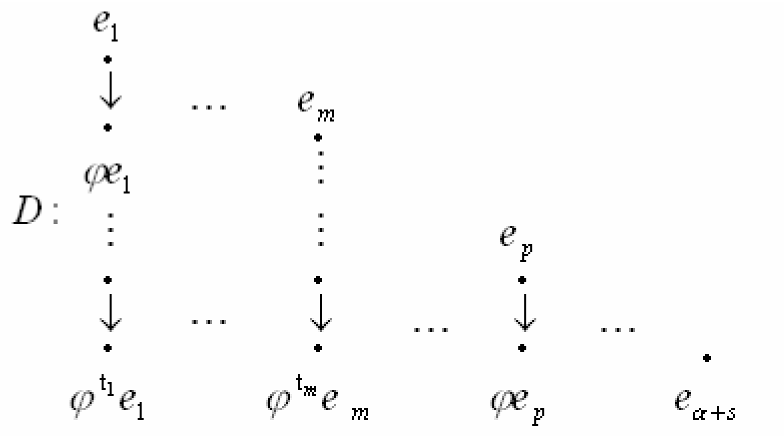
Точки каждого столбика этой диаграммы обозначают вектора $e_m, \varphi e_m, ..., \varphi^{\kappa_m - 1} e_m$, а стрелки показывают действие оператора φ на соответствующих векторах. (Все вектора из нижнего этажа диаграммы переводятся в нулевой вектор). Доказательство теоремы будем вести индукцией, по размерности пространства V.

Если $\dim_k V = 1$, то $V = \langle e_1 \rangle$, $\varphi e_1 = \alpha e_1$. Но V - корневое пространство, отвечающее нулевому собственному значению, то есть $\varphi^{\kappa} e_1 = 0$, для некоторого κ. Значит $\alpha = 0$ и $A_{\varphi} = [0]$, то есть e_1 - жорданов базис.

Пусть для любого корневого пространства размерности меньше n утверждение справедливо. Рассмотрим пространство V, $\dim_k V = n$ и для любого $v \in V$, $\varphi^t v = 0$ для некоторого t. Обозначим через V_0 подпространство собственных векторов пространства V, то есть $V_0 = \{v \in V, \varphi v = 0\}$. Так как $\varphi V_0 \subseteq V_0$, то можно определить фактороператор $\overline{\varphi}$, действующий на факторпространстве $\overline{V} = V / V_0$. Для любого вектора $\overline{v}$ из факторпространства $\overline{V}$ выполняется соотношение $\overline{\varphi}^t \overline{v} = \overline{0}$, для некоторого t, а $\dim_k \overline{V} < \dim_k V$. Поэтому, по предположению индукции в пространстве $\overline{V}$ существует жорданов базис, которому отвечает диаграмма $\overline{D}$.



Пусть $\overline{e}_1, ..., \overline{e}_m, ..., \overline{e}_p$ вектора, отвечающие верхним точкам каждого столбца диаграммы $\overline{D}$, а $e_1, ..., e_m, ..., e_p$ - представители соответствующих классов. Т.к. $\overline{\varphi}^{t_1} \overline{e}_1 = 0, ..., \overline{\varphi}^{t_m} \overline{e}_m = 0, ..., \overline{\varphi e}_p = 0$, то $\varphi^{t_1+1} e_1 = 0, ..., \varphi^{t_m+1} e_m = 0, ..., \varphi^2 e_p = 0$ в силу принадлежности векторов $\varphi^{t_1} e_1, ..., \varphi^{t_m} e_m, ..., \varphi e_p$ подпространству V_0. Обозначим через U линейную оболочку векторов $\varphi^{t_1} e_1, ..., \varphi^{t_m} e_m, ..., \varphi e_p$, а через W подпространство в V_0 дополнительное к U, т.е. $V_0 = U \oplus W$. Пусть $e_\alpha, e_{\alpha+1}, ..., e_{\alpha+s}$ - базис подпространства W. Обозначим через D диаграмму:



Если мы проверим, что вектора, отвечающие точкам этой диаграммы, образуют базис пространства V, то по построению это будет жорданов базис.

Пусть $v \in V$, тогда $\overline{v} \in \overline{V} = V/V_0$ и, следовательно,

$\overline{v} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=0}^{t_j-1}\lambda_{ij}\overline{\varphi}^i\overline{e}_j, \lambda_{ij} \in k$. Тогда $v - \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=0}^{t_j-1}\lambda_{ij}\varphi^i e_j \in V_0$, т.е.

$v - \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=0}^{t_j-1}\lambda_{ij}\varphi^i e_j = \sum_{j=1}^{p}\lambda_{ij}\varphi^{t_j}e_j + \sum_{q=0}^{s}\gamma_q e_{\alpha+q}$, $\gamma_q \in k$ или $v = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=0}^{t_j}\lambda_{ij}\varphi^i e_j + \sum_{q=0}^{s}\gamma_q e_{\alpha+q}$.

Итак, каждый вектор из V является линейной комбинацией векторов, отвечающих точкам диаграммы *D*.

Для доказательства линейной независимости векторов $\{\varphi^i e_j, j = 1,...,p, i = 0,...,t_j; e_{\alpha+q}, q = 0,...,s\}$ проверим вначале независимость векторов нижнего этажа диаграммы *D*, т.е. $\{\varphi^{t_j} e_j, j = 1,...,p; e_{\alpha+q}, q = 0,...,s\}$.

Т.к. $V_0 = U \oplus W$, а $\{e_{\alpha+t}, t = 0,...,s\}$ базис пространства W, то достаточно проверить линейную независимость образующих пространства U, т.е. $\{\varphi^{t_j} e_j, j = 1,...,p_j\}$.

Предположим, что существует набор $(\beta_1,...,\beta_p)$, $\beta_i \in k$ такой что $\sum_{j=1}^{p}\beta_j\varphi^{t_j}e_j = 0$. По построению каждое $t_j \geq 1$. Поэтому $\varphi\sum_{j=1}^{p}\beta_j\varphi^{t_j-1}e_j = 0$, т.е. $\sum_{j=1}^{p}\beta_j\varphi^{t_j-1}e_j\in U$. Значит $\sum_{j=1}^{p}\beta_j\overline{\varphi}^{t_j-1}\overline{e}_j=\overline{0}$. Но вектора $\overline{\varphi}^{t_j-1}\overline{e}_j$, $j=1,...,p$ входят в базис факторпространства $\overline{V}$ (им отвечают точки нижнего этажа диаграммы $\overline{D}$), следовательно, все коэффициенты β_j равны нулю, т.е. вектора $\varphi^{t_j}e_j$, $j=1,...,p$ линейно независимы.

Пусть вектора, отвечающие точкам диаграммы D, линейно зависимы: $\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=0}^{t_j}\lambda_{ij}\varphi^i e_j+\sum_{q=0}^{s}\gamma_q e_{\alpha+q}=0$. Обозначим через r номер самого верхнего этажа диаграммы D, перед векторами которого имеются ненулевые коэффициенты. Применив к соотношению линейной зависимости оператор φ^{r-1}, получим $\sum_{j=1}^{p}\lambda_{t_j-r+1,j}\varphi^{t_j}e_j=0$, в котором по предположению не все коэффициенты равны нулю. Но это противоречит линейной независимости векторов нижнего этажа. Теорема доказана.

Пример. Найти жорданову нормальную форму оператора φ, в пространстве $V=<e_1,e_2,e_3,e_4>$, заданного матрицей:

$$A_\varphi=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Здесь и далее жордановой нормальной формы оператора φ будем называть матрицу этого оператора в жордановом базисе.

$$|A_\varphi-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & -1 & 1\\ -1 & 2-\lambda & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1-\lambda & 0\\ -1 & 1 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & -1 & 1\\ -1 & 2-\lambda & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0 & 1\\ -1 & 2-\lambda & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ -1 & 2-\lambda & 0\\ -1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}==(1-\lambda)^2\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^4$$

Характеристические корни $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$. Собственные вектора находятся из системы:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

Пространство собственных векторов $U = \{(\varphi - 1)v = 0\}$ имеет базис: $f_1 = (1,1,0,0), f_2 = (0,0,1,1)$

Добавляя к векторам f_1, f_2 вектора $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$, $e_4 = (0,0,0,1)$, находим, что базис пространства, содержащий f_1, f_2, состоит из векторов f_1, f_2, e_1, e_3, а $e_2 = f_1 - e_1$, $e_4 = f_2 - e_3$. Обозначив e_1 через f_3, а e_3 через f_4, имеем $\varphi f_1 = f_1$, $\varphi f_2 = f_2$, $\varphi f_3 = -e_2 - e_3 - e_4 = -f_1 - f_2 + f_3$, $\varphi f_4 = -e_1 - e_2 + e_3 = -f_1 + f_4$.

Базис факторпространства $\overline{V} = V/U$ состоит из векторов $\bar{f}_3, \bar{f}_4$ и матрица фактороператора $\overline{\varphi}$ в этом базисе имеет вид: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Т.е. $\bar{f}_3, \bar{f}_4$ - жорданов базис с диаграммой $\overline{D} : \bar{f}_3 \bullet \quad \bullet \bar{f}_4$ для оператора $\overline{\varphi} - \overline{E}$.

Тогда диаграмма D для оператора $\varphi - E$ имеет вид:

$$\begin{array}{ccc} f_3 & & f_4 \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\varphi - E) f_3 & & (\varphi - E) f_4 \end{array}$$

В соответствии с диаграммой D жорданова форма оператора $\varphi - E$ равна

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

а оператора φ:

$$B_\varphi = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Кроме того, мы получили матрицу перехода T к жорданову базису, которая осуществляет подобие матриц A_φ и B_φ, т.е. $B_\varphi = T^{-1}A_\varphi T$,

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вопрос единственности жордановой формы решается с помощью формулы для количества жордановых клеток данного размера.

Теорема 9.2. *Пусть* $i_\kappa(\lambda_j)$ *- количество жордановых клеток размера* κ*, отвечающих собственному значению* λ_j *матрицы* A*. Тогда* $i_\kappa(\lambda_j) = r_{\kappa-1}(\lambda_j) - 2r_\kappa(\lambda_j) + r_{\kappa+1}(\lambda_j)$*,* $\kappa \geq 1$*, где* $r_t(\lambda_j)$ *ранг матрицы* $(A - \lambda_j E)^t$*, а* $r_0(\lambda_j) = n$*,* n *- размер матрицы* A*.*

Доказательство. Обозначим через J жорданову нормальную форму оператора $\varphi \in End_k(V)$, заданного в некотором базисе матрицей A. Пусть T матрица перехода от первоначального базиса к жорданову. Тогда $J = T^{-1}AT$ и для любого λ из k $J - \lambda E = T^{-1}(A - \lambda E)T$. Более того $(J - \lambda E)^s = T^{-1}(A - \lambda E)^s T$. Поэтому ранги матриц $(A - \lambda E)^s$ и $(J - \lambda E)^s$ совпадают, т.е. формулу для $i_\kappa(\lambda_j)$ достаточно проверить для случая, когда $r_t(\lambda_j)$ ранг матрицы $(J - \lambda_j E)^t$.

Если $B=\begin{bmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_p \end{bmatrix}$ блочнодиагональная матрица, то, очевидно, $rB=\sum_{i=1}^{p} rB_i$ (Здесь и далее rC - ранг матрицы C). Следовательно, для вычисления ранга матрицы $(J-\lambda_j E)^t$ достаточно вычислить ранг отдельного блока размера m:

$$J_m^\kappa(\lambda_s-\lambda_j)=\begin{bmatrix} \lambda_s-\lambda_j & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_s-\lambda_j & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_s-\lambda_j \end{bmatrix}^\kappa.$$

1) Если $\lambda_s-\lambda_j\neq 0$, то $rJ_m^\kappa(\lambda_s-\lambda_j)=m$ для любого κ, так как $|\ J_m^\kappa(\lambda_s-\lambda_j)\ |\neq 0$.

2) Пусть $\lambda_s=\lambda_j$. Тогда $J_m^\kappa(0)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$,

$1\le\kappa\le m-1, J_m^\kappa(0)=0, \kappa\ge m$, где единицы стоят на к-той побочной диагонали и их количество равно *m-k*, $\kappa=1,\dots,m-1$. Следовательно, $rJ_m^\kappa(0)=\begin{cases} m-\kappa, 1\le\kappa\le m-1 \\ 0, \kappa\ge m \end{cases}$.

В рекуррентной форме последнее соотношение примет вид: $rJ_m^\kappa(0)=rJ_m^{\kappa-1}(0)-1, 1\le\kappa\le m$. Поэтому при переходе от $(J-\lambda_j E)^{\kappa-1}$ к $(J-\lambda_j E)^\kappa$ ранг уменьшается на количество клеток, отвечающих значению λ_j, размеры которых не меньше κ, то есть $r_\kappa(\lambda_j)=r_{\kappa-1}(\lambda_j)-i_\kappa(\lambda_j)-i_{\kappa+1}(\lambda_j)-\dots$. В частности, при $\kappa=1$ ранг $J-\lambda_j E$

меньше размера матрицы J на величину, равную количеству всех клеток, отвечающих собственному значению λ_j.

Аналогично $r_{\kappa+1}(\lambda_j) = r_\kappa(\lambda_j) - i_{\kappa+1}(\lambda_j) - i_{\kappa+2}(\lambda_j) - \ldots$.

Вычитая из первого соотношения второе, получим:

$$r_\kappa(\lambda_j) - r_{\kappa+1}(\lambda_j) = r_{\kappa-1}(\lambda_j) - r_\kappa(\lambda_j) - i_\kappa(\lambda_j).$$

Или $i_\kappa(\lambda_j) = r_{\kappa-1}(\lambda_j) - 2r_\kappa(\lambda_j) + r_{\kappa+1}(\lambda_j)$.

Следствие 9.3. *Жорданова нормальная форма с точностью до перестановки жордановых клеток определяется однозначно.*

`Пример`. Пусть A матрица из предыдущего примера. Ее характеристические корни $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$. Вычисляем степени матрицы $A–E$:

$$A - E = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (A-E)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (A-E)^\kappa, \kappa \ge 2.$$

Поэтому $r_1(1) = 2, r_2(1) = 0, r_\kappa(1) = 0, \kappa \ge 2.$ Следовательно, $i_1(1) = 4 - 2r_1(1) + r_2(1) = 0$, $i_2(1) = r_1(1) - 2r_2(1) + r_3(1) = 2$. Таким образом, жорданова форма состоит из двух жордановых клеток размера 2.

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

10. Минимальный многочлен матрицы

Определение 10.1. *Многочлен* $f(x) \in k[x]$ *называется минимальным многочленом матрицы* $A = (a_{ij}), a_{ij} \in k$, *если*

1) $f(A) = 0$, *то есть многочлен* $f(x)$ *аннулируется матрицей* A, *2) среди всех многочленов, удовлетворяющих условию 1, степень $f(x)$ - минимальна,*

3) старший коэффициент многочлена $f(x)$ равен 1.

Предложение 10.1. *Любой многочлен, аннулируемый матрицей A, делится на минимальный многочлен этой матрицы.*

Доказательство. Пусть $\mu_A(x)$ — минимальный многочлен матрицы A, а $f(x)\in k[x]$ такой, что $f(A)=0$. Тогда существуют многочлены $q(x), r(x)\in k[x]$, что $f(x)=q(x)\mu_A(x)+r(x)$, причем либо $r(x)=0$, либо $\deg r(x)<\deg\mu_A(x)$.

Предположим, что $r(x)\neq 0$. Тогда $f(A)=q(A)\mu_A(A)+r(A)$. Но $f(A)=\mu_A(A)=0$, то есть $r(A)=0$. Так как $\deg r(x)<\deg\mu_A(x)$, то получаем противоречие с минимальностью степени $\mu_A(x)$. Следовательно, $r(x)=0$ и $f(x)$ делится на $\mu_A(x)$.

Следствие 10.1. *Минимальный многочлен определен однозначно.*

Доказательство. Пусть $\mu_1(x)$ и $\mu_2(x)$ два минимальных многочлена матрицы A. В силу п.2 определения 10.1 $\deg\mu_1(x)=\deg\mu_2(x)$. Тогда из предложения 10.1 вытекает, что $\mu_1(x)=c\mu_2(x), c\neq 0, c\in k$. Наконец, сравнивая старшие коэффициенты в последнем равенстве, получим $c=1$.

Лемма 10.2. *Минимальные многочлены подобных матриц совпадают.*

Доказательство. Пусть A и B две подобные матрицы, то есть $A=T^{-1}BT, |T|\neq 0$. Обозначим через $\mu_A(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$ и $\mu_B(x)=\sum_{i=0}^{n}b_ix^i$ - минимальные многочлены этих матриц. Тогда

$$\mu_B(A)=\sum_{i=0}^{n}b_i\left(T^{-1}B^iT\right)=T^{-1}\left(\sum_{i=0}^{n}b_iB^i\right)T=T^{-1}\mu_B(B)T=0.$$

В силу предложения 10.1 $\mu_B(x)=q(x)\mu_A(x)$. Аналогично, $\mu_A(x)=p(x)\mu_B(x)$. То есть $\mu_B(x)=q(x)p(x)\mu_B(x)$. Отсюда $q(x)p(x)\in k$, а из сравнения старших коэффициентов следует, что $q(x)=p(x)=1$. Итак, $\mu_A(x)=\mu_B(x)$.

Лемма 10.3. *Если* $A=\begin{bmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_s \end{bmatrix}$ *блочнодиагональная матрица, то минимальный многочлен* $\mu_A(x)$ *матрицы* A *равен* $HOK\{\mu_{A_1}(x),\dots,\mu_{A_s}(x)\}$, $\mu_{A_i}(x)$ *– минимальный многочлен матрицы* A_i.

Доказательство. Если $f(x)\in k[x]$ - произвольный многочлен, а A - блочнодиагональная матрица, указанная в лемме, то

$$f(A)=\begin{bmatrix} f(A_1) & & & 0 \\ & f(A_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & f(A_s) \end{bmatrix}.$$

Поэтому $\mu_A(A_i)=0, i=1,\dots,s$. По предложению 10.1 минимальный многочлен $\mu_A(x)$ матрицы A делится на каждый минимальный многочлен $\mu_{A_i}(x)$. Следовательно, он делится на их наименьшее общее кратное, обозначаемое в дальнейшем $m(x)$. С другой стороны, $m(A_i)=0$, так как $\mu_{A_i}(x)\mid m(x)$. Значит $m(A)=\begin{bmatrix} m(A_1) & & \\ & \ddots & \\ & & m(A_s) \end{bmatrix}=0$.

Опять, используя предложение 10.1, имеем: $\mu_A(x)\mid m(x)$. Рассуждая далее как в конце леммы 10.2, получим, что $\mu_A(x)=m(x)$.

Лемма 10.4. *Если* $A=\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda\end{bmatrix}$*, то минимальный многочлен* $\mu_A(x)$ *равен* $(x-\lambda)^m$*, где* m *– размер матрицы* A.

Доказательство. Как следует из вычислений в доказательстве теоремы 9.2 $(A-\lambda E)^m=0$. Поэтому $\mu_A(x)\,|\,(x-\lambda)^m$. Но все делители многочлена $(x-\lambda)^m$ имеют вид $(x-\lambda)^k, 1\le k\le m$. Если $\mu_A(x)=(x-\lambda)^t, t<m$, то $(A-\lambda E)^t=0$. Это противоречит виду матрицы $(A-\lambda E)^t$, которая равна

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & & \cdots & & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & & \cdots & & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Следовательно, $\mu_A(x)=(x-\lambda)^m$.

Теорема 10.5. *Минимальный многочлен* $\mu_A(x)$ *матрицы* A *равен* $\prod_{i=1}^{s}(x-\lambda_i)^{m_i}$ *, где* $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ *все различные собственные значения матрицы* A*, а* m_i *– максимальный размер жордановой клетки, отвечающей собственному значению* λ_i.

Доказательство. В силу леммы 10.2 минимальный многочлен $\mu_A(x)$ матрицы A совпадает с минимальным многочленом $\mu_J(x)$ жордановой нормальной формы этой матрицы. Пусть $J=\begin{bmatrix}J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s\end{bmatrix}$,

где J_t - матрица, состоящая из блоков, отвечающих собственному значению λ_t. Тогда по лемме 10.3 $\mu_{J_t}(x)$ есть наименьшее общее кратное минимальных многочленов $\mu_i(x)=(x-\lambda_t)^i$ для каждого жорданова блока размерности i, то есть $\mu_{J_t}(x)=(x-\lambda_t)^{m_t}$, где m_t - размер максимального из таких блоков.

Так как $НОК\left((x-\lambda_1)^{m_1},\ldots,(x-\lambda_s)^{m_s}\right)=\prod_{i=1}^{s}(x-\lambda_i)^{m_i}$, когда все λ_i различны, то $\mu_J(x)=\prod_{i=1}^{s}(x-\lambda_i)^{m_i}$.

Пример.

$$A=\begin{bmatrix}0&1&-1&1\\-1&2&-1&1\\-1&1&1&0\\-1&1&0&1\end{bmatrix}.$$

Ее жорданова форма, как следует из примера параграфа 9, равна

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}.$$

Следовательно, $\mu_A(x)=(x-1)^2$. Действительно, как следует из вычислений того же примера, $(A-E)^2=0$ и легко заметить, что матрица A не может аннулировать многочлен первой степени, так как не является скалярной.

Глава 3. Векторные пространства со скалярным произведением

1. *Евклидовы пространства*

Как известно, в вещественном трехмерном пространстве скалярное произведение двух векторов определяется как произведение длин этих векторов на косинус угла между ними. Для вещественного пространства произвольной размерности, напротив, длину вектора и косинус угла между векторами определяют с помощью скалярного произведения. Рассмотрим эту процедуру подробно.

Определение 3.1. *Скалярным произведением на вещественном пространстве V называют отображение* $(\cdot \mid \cdot)$ *из декартова квадрата* $V \times V$ *в поле действительных чисел* **R**, *обладающее следующими свойствами:*

1. $(x \mid y) = (y \mid x),\ x, y \in V$
2. $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \mid y) = \alpha_1 (x_1 \mid y) + \alpha_2 (x_2 \mid y), \alpha_1, \alpha_2 \in R, x_1, x_2, y \in V$
3. $(x \mid x) > 0,$ *если* $x \neq 0, x \in V$

Примеры:

1) Пусть V — n-мерное векторное пространство над R. Выберем некоторый базис $e_1,\ldots,e_n$ из V. Пусть $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ - любые два вектора из V. Определим скалярное произведение x и y следующей формулой: $(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Тогда

$$(y \mid x) = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = (x \mid y),$$

$$(\alpha' x' + \alpha'' x'' \mid y) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha' x_i' + \alpha'' x_i'') y_i = \alpha' \sum_{i=1}^{n} x_i' y_i + \alpha'' \sum_{i=1}^{n} x_i'' y_i = \alpha' (x' \mid y) + \alpha'' (x'' \mid y),$$

$(x \mid x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$, так как все $x_i^2 \geq 0$ и существует i_0, для которого $x_{i_0} \neq 0$, если $x \neq 0$.

2) Пусть $V = C[a,b]$ – пространство непрерывных функций на интервале $[a,b]$. Для любой пары функций $f, g \in C[a,b]$ определим отображение $(f \mid g) = \int_a^b f(x) g(x) dx$. Легко видеть, что свойства 2, 3 скалярного произведения вытекают из соответствующих свойств интеграла, а свойство 1 следует из коммутативности произведения функций.

Вещественное линейное пространство, снабженное скалярным произведением, будем называть евклидовым пространством.

Введем понятие длины вектора.

Определение 3.2. *Длиной вектора x из евклидова пространства V будем называть положительное действительное число* $\sqrt{(x \mid x)}$, *которое обозначим* $\|x\|$.

Легко видеть, что $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|, \lambda \in R$. Для проверки неравенства $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$, которое по аналогии с трехмерным случаем называется неравенством треугольника докажем следующую теорему.

Теорема 3.1.(неравенство Коши-Буняковского) *Для любых двух векторов x,y из евклидова пространства V справедливо неравенство* $|(x \mid y)| \le \|x\|\|y\|$.

Доказательство. Для любого $\lambda \in R : (\lambda x - y \mid \lambda x - y) \ge 0$. Следовательно, $\lambda^2 (x \mid x) - 2\lambda (x \mid y) + (y \mid y) \ge 0$. Но квадратный трехчлен принимает только неотрицательные значения, если и только если его дискриминант $D = (x \mid y)^2 - (x \mid x)(y \mid y) \le 0$. Последнее неравенство равносильно сформулированной теореме.

Заметим, что если $|(x \mid y)| = \|x\|\|y\|$, то D=0 и существует единственное вещественное λ_0, для которого $(\lambda_0 x - y \mid \lambda_0 x - y) = 0$, то есть вектора x и y коллинеарны. Обратное также справедливо. То есть неравенство Коши-Буняковского для неколлинеарных векторов строгое, а для коллинеарных превращается в равенство.

Следствие 3.1. $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y \mid x + y) = (x \mid x) + 2(x \mid y) + (y \mid y) \le \\ &\le \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

Извлекая корень из левой и правой частей неравенства, имеем утверждение следствия. Перепишем неравенство Коши-Буняковского следующим образом:

$$-1 \le \frac{(x \mid y)}{\|x\| \cdot \|y\|} \le 1.$$

Тогда, обозначая $\frac{(x \mid y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$ через $\cos\varphi$, будем называть φ углом между векторами x и y, считая, что $0 \le \varphi \le \pi$.

Определение 3.3. *Вектора x и y евклидова пространства V называются ортогональными, если* $(x \mid y) = 0$*, то есть угол* φ *между x и y равен* $\frac{\pi}{2}$.

2. Процесс ортогонализации

При изучении метрических свойств трехмерного пространства обычно выбирают базис из трех взаимно ортогональных векторов единичной длины. Покажем, что в произвольном n-мерном евклидовом пространстве также существует аналогичный базис.

Теорема 2.1. *Пусть* $U = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle$ *- ненулевое подпространство в евклидовом пространстве V. Тогда существуют ненулевые вектора* $b_1, \ldots, b_s, s \le m$ *такие, что* $(b_i \mid b_j) = 0, \; 1 \le i, j \le s, \quad i \ne j$ *и* $U = \langle b_1, \ldots, b_s \rangle$.

Доказательство. Так как $U \ne 0$, то один из образующих $a_i \ne 0$. Меняя нумерацию, можно считать, что это a_1. В качестве вектора b_1 возьмем a_1. Следующий вектор b_2 ищем в виде: $b_2 = a_2 + \lambda_{21} b_1$. Из условия $(b_2 \mid b_1) = 0$ получим: $(a_2 \mid b_1) + \lambda_{21}(b_1 \mid b_1) = 0$. Так как $b_1 \ne 0$, то $(b_1 \mid b_1) \ne 0$, то есть $\lambda_{21} = -\frac{(a_2 \mid b_1)}{(b_1 \mid b_1)}$. Если $b_2 \ne 0$, то b_3 ищем в виде

$b_3 = a_3 + \lambda_{31} b_1 + \lambda_{32} b_2$. Если $b_2 = 0$, то b_3 ищем в виде $b_3 = a_3 + \lambda_{31} b_1$. Пусть уже найдены ненулевые взаимно ортогональные вектора $b_1, b_r, \ldots, b_t$ за $k-1$ шаг. Тогда b_k ищем в виде

$b_k = a_k + \lambda_{k1} b_1 + \lambda_{kr} b_r + \ldots + \lambda_{kt} b_t, 1 < r < \ldots < t$. Из условий

$(b_k \mid b_j) = 0, j \in \{1, r, \ldots, t\}$ находим

$$\lambda_{kj} = -\frac{(a_k \mid b_j)}{(b_j \mid b_j)}.$$

Подставляя эти значения в выражение для b_k, вычисляем очередной вектор. Если он оказался нулевым, то при дальнейших построениях его не учитываем. Через m шагов мы получим $s \le m$ ненулевых, взаимно ортогональных векторов. Обозначим их $b'_1, b'_2, ..., b'_s$. Так как $a_k = b_k - \lambda_{k1} b_1 - \lambda_{kr} b_r - ... - \lambda_{kt} b_t$, то $U \subseteq \langle b'_1, ..., b'_s \rangle$. С другой стороны, если уже известно, что $b_1, b_r, ..., b_t \in U$, то из формулы для b_k следует, что и $b_k \in U$. Итак, $U = \langle b'_1, ..., b'_s \rangle$. Заметим, что вектора $b'_1, ..., b'_s$ образуют базис подпространства U. Действительно, если $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i b'_i = 0$ для некоторых $\alpha_i \in R, i = 1, ..., s$, то, умножая последнее соотношение на b'_j, получим: $\alpha_j (b'_j \mid b'_j) = 0$, то есть $\alpha_j = 0, j = 1, ..., s$.

Процедура, использованная для доказательства теоремы 2.1 называется процессом ортогонализации.

Пример. Пусть $V = R^4$, скалярное произведение векторов задается как в примере 1, параграфа 1, т.е. $(x \mid y) = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i$, $x.y \in R^4$. Подпространство U натягивается на вектора: $a_1 = (1,0,1,0)$, $a_2 = (2,1,0,1)$, $a_3 = (3,1,1,1)$.

В качестве первого вектора ортогональной системы возьмем $b_1 = a_1 = (1,0,1,0)$. Вектор b_2 ищем в виде $a_2 + \lambda_{21} b_1$. Условие $(b_2 \mid b_1) = 0$ дает:

$$\lambda_{21} = -\frac{(a_2 \mid b_1)}{(b_1 \mid b_1)} = -1.$$

Тогда $b_2 = (2,1,0,1) - (1,0,1,0) = (1,1,-1,1)$. Ищем $b_3 = a_3 + \lambda_{31} b_1 + \lambda_{32} b_2$. Из $(b_3 \mid b_1) = 0$ следует

$$\lambda_{31} = -\frac{(a_3 \mid b_1)}{(b_1 \mid b_1)} = -2.$$

Аналогично,

$$\lambda_{32} = -\frac{(a_3 \mid b_2)}{(b_2 \mid b_2)} = -1 .$$

Поэтому $b_3 = (1,1,1,1) - 2(1,0,1,0) - (1,1,-1,1) = (0,0,0,0)$. Итак, $U = \langle b_1, b_2 \rangle$, причем $(b_2 \mid b_1) = 0$.

Определение 2.1. *Система векторов* $a_1,...,a_m$ *называется ортонормированной, если* $(a_i \mid a_j) = 0, 1 \le i, j \le m, i \ne j, (a_i \mid a_i) = 1$.

Следствие 2.1. *Конечномерное евклидово пространство имеет ортонормированный базис.*

Доказательство: Пусть V — евклидово пространство размерности n, $a_1, a_2,..., a_n$ - некоторый базис пространства V. Применяя процедуру ортогонализации, найдем вектора $b_1, b_2,..., b_m, m \le n$, такие, что $(b_i \mid b_j) = 0, 1 \le i, j \le m, i \ne j$ и $V = \langle b_1, b_2,..., b_m \rangle$. Но тогда $m = n$ и $b_1,..., b_m$ образуют базис V. Обозначим через e_i вектора вида $\frac{b_i}{\sqrt{(b_i \mid b_i)}} = \frac{b_i}{\|b_i\|}$. Тогда $(e_i \mid e_i) = 1, \quad i = 1,\ldots,n$ и, кроме того $(e_i \mid e_j) = 0, \ i \ne j, \ 1 \le i, j \le n$. Следовательно, вектора $e_1,...,e_n$ образуют ортонормированный базис.

3. Изоморфизм евклидовых пространств

Также как для линейных пространств, структура евклидова пространства определяется его размерностью.

Определение 3.1. *Два евклидовых пространства* V_1 *и* V_2 *изоморфны* $(V_1 \cong V_2)$*, если существует отображение* $\varphi : V_1 \to V_2$*, которое задает изоморфизм линейных пространств и сохраняет скалярное произведение, то есть* $(\varphi x \mid \varphi y) = (x \mid y), x, y \in V_1$.

Теорема 3.1. *Конечномерные евклидовы пространства V,V' изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают.*

Доказательство. Если евклидовы пространства *V,V'* изоморфны, то они, в частности, изоморфны, как линейные пространства. А поэтому, в силу теоремы 1.4.3, их размерности совпадают.

Пусть $\dim_R V = \dim_R V' = n$. Тогда, как показано в предыдущем параграфе, в каждом из этих пространств существует ортонормированный базис. Обозначим эти базисы через $e_1,...,e_n$ и $e_1',...,e_n'$ соответственно. Определим отображение $\varphi : V \to V'$ по правилу $\varphi\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i',\ \ \alpha_i \in R$. Так же как в теореме 1.4.3. легко убедиться, что φ – изоморфизм линейных пространств. Если теперь $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i$, то $(x \mid y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$. Но $\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i'$, $\varphi(y) = \sum_{i=1}^n \beta_i e_i'$ и $(\varphi(x) \mid \varphi(y)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i$. Следовательно, $(x \mid y) = (\varphi(x) \mid \varphi(y)),\ x, y \in V$, то есть φ - изоморфизм евклидовых пространств.

4. *Ортогональное дополнение*

При разложении трехмерного пространства в сумму подпространств меньшей размерности часто в качестве дополнения к плоскости выбирается перпендикулярная ей прямая (и наоборот). Рассмотрим, как эта конструкция обобщается на случай произвольного конечномерного евклидова пространства.

Определение 4.1. *Пусть U – подпространство евклидова пространства V. Ортогональным дополнением подпространства U называется следующая совокупность векторов:*

$$U^{\perp} = \{x \in V \mid (x, u) = 0, \forall u \in U\}.$$

Легко проверить, что $U^{\perp}$ - подпространство.

Теорема 4.1. *Для любого подпространства U евклидова пространства V имеет место разложение* $V = U \oplus U^{\perp}$.

Доказательство. Пусть $a_1,...,a_m$ - некоторый базис *U*. Дополним его до базиса $a_1,...,a_m,...,a_n$ всего пространства *V*. Применяя процесс ортогонализации, построим ортонормированный базис $e_1,...,e_m,...,e_n$ пространства *V*. Причем вектора $e_1,...,e_m$ образуют ортонормированный базис подпространства *U*. Обозначим $W = \langle e_{m+1},...,e_n \rangle$. Тогда $V = U \oplus W$ (по свойству 1.7.3). И, по определению ортогонального дополнения, $W \subseteq U^{\perp}$.

С другой стороны, если $x \in U^{\perp}$, то в его разложении по базису $e_1,...,e_n$ первые *m* координат будут нулевыми. Действительно, если $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, то из условия $(x \mid e_j) = 0, j = 1,...,m$, получим $x_j = 0, j = 1,...,m$. Следовательно, $U^{\perp} \subseteq W$. Итак, $V = U \oplus U^{\perp}$. Теорема доказана.

Представление вектора $x \in V$ в виде суммы $y + z, y \in U, z \in U^{\perp}$ называют ортогональным разложением, а вектора y и z называют ортогональными проекциями на U параллельно $U^{\perp}$ и, соответственно, на $U^{\perp}$ параллельно U.

Пример: $V = R^4, U = \langle a_1, a_2 \rangle, a_1 = (1,2,0,1), a_2 = (-1,1,1,0)$. Найти $U^{\perp}$ и проекцию вектора $x = (3,0,1,2)$ на U параллельно $U^{\perp}$.

Из определения $U^{\perp}$ следует, что $v \in U^{\perp} \Leftrightarrow (v \mid a_i) = 0, i = 1,2$. Следовательно, $U^{\perp}$ — множество решений однородной системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}.$$

Поэтому базис $U^{\perp}$ - это фундаментальная система решений указанной системы уравнений. Например, в качестве таковой можно взять вектора $v_1 = (2,-1,3,0), v_2 = (1,-1,0,3)$. Для нахождения проекции вектора x на подпространство U, то есть нахождения таких $y \in U, z \in U^{\perp}$, что $x = y + z$, представим у в виде $y_1 a_1 + y_2 a_2$. Тогда из условия, что $(z \mid a_i) = 0, i = 1,2$, получим следующую систему уравнений:

$$y_1(a_1 \mid a_1) + y_2(a_2 \mid a_1) = (x \mid a_1)$$
$$y_1(a_1 \mid a_2) + y_2(a_2 \mid a_2) = (x \mid a_2).$$

Решая ее, получим $y_1 = 1, y_2 = -1,$ то есть $y = (2,1,-1,1)$.

5. Унитарное пространство

Определение 5.1. *Отображение (|): V×V→C на комплексном линейном пространстве V называется эрмитовым произведением, если:*

1) $(x \mid y) = \overline{(y \mid x)}, x, y \in V$, то есть $(x \mid x) \in R$,
2) $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \mid y) = \alpha_1 (x_1 \mid y) + \alpha_2 (x_2 \mid y), x_1, x_2, y \in V$
3) $(x \mid x) > 0$, если $x \neq 0$.

Комплексное линейное пространство, снабженное эрмитовым произведением, называется унитарным пространством.

Свойства 1 и 3 позволяют определить длину вектора как $\left|\sqrt{(x \mid x)}\right|$ с выполнением тех же свойств длины вектора, что и в евклидовом случае.

Для унитарных пространств выполняются утверждения, аналогичные утверждениям для евклидовых пространств.

Теорема 5.1. *Пусть* $U = \langle a_1, ..., a_m \rangle$ *ненулевое подпространство унитарного пространства V. Тогда существуют ненулевые вектора* $b_1, ..., b_s, s \leq m$ *такие, что* $(b_i \mid b_j) = 0, \quad 1 \leq i, j \leq s, \quad i \neq j$ *и* $U = \langle b_1, ..., b_s \rangle$.

Так же как для евклидовых пространств, ортонормированным базисом унитарного пространства размерности *n* называется совокупность из *n* векторов $e_1,...,e_n$ таких, что

$$\left(e_i \mid e_j\right) = 0, i \neq j, 1 \leq i, j \leq n, \quad \left(e_i \mid e_i\right) = 1, \quad i = 1,...,n \; .$$

Следствие 5.1. *Любое конечномерное унитарное пространство имеет ортонормированный базис.*

Определение 5.2. *Два унитарных пространства* V_1 *и* V_2 *изоморфны, если существует отображение* $\varphi : V_1 \to V_2$*, которое биективно, линейно и сохраняет эрмитово произведение, то есть* $\left(x \mid y\right) = \left(\varphi x \mid \varphi y\right), x, y \in V_1$.

Теорема 5.2. *Конечномерные унитарные пространства* V_1 *и* V_2 *изоморфны тогда и только тогда, когда* $\dim_C V_1 = \dim_C V_2$.

Теорема 5.3. *Для любого подпространства U конечномерного унитарного пространства V имеет место разложение:* $V = U \oplus U^{\perp}$*, где* $U^{\perp} = \left\{x \in V, \left(x \mid u\right) = 0, u \in U\right\}$.

Доказательства всех теорем этого параграфа получаются прямым повторением соответствующих рассуждений для евклидовых пространств.

Глава 4. Билинейные и квадратичные формы

1. Матрица билинейной формы

Определение 1.1. *Пусть V – линейное пространство над полем k. Отображение f: V×V→ k называется билинейной формой на пространстве V, если:*

1) $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 f(x_1, y) + \alpha_2 f(x_2, y), x_1, x_2, y \in V, \alpha_1, \alpha_2 \in k$

2) $f(x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = \beta_1 f(x\ , y_1) + \beta_2 f(x, y_2), x, y_2, y_1 \in V, \beta_1, \beta_2 \in k$

Зафиксируем некоторый базис $e_1,...,e_n$ в пространстве V. Тогда матрица $F=(f_{ij})$, $1\le i,j\le n$, $f_{ij}=f(e_i,e_j)$ называется матрицей билинейной формы f. Если $x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$, $y=\sum_{i=1}^{n}y_ie_i$, то $f(x,y)=X^tFY$, где $X^t=(x_1,x_2,...,x_n)$, $Y=(y_1, \quad ..., \quad y_n)^t$. Действительно,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,\sum_{j=1}^{n}y_je_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_jf(e_i,e_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_if_{ij}y_j=(x_1,x_2,...,x_n)\begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1n} \\ & \cdots & \\ f_{n1} & \cdots & f_{nn}\end{bmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}.$$

Предположим теперь, что $e_1',...,e_n'$ — другой базис пространства V, а $F'=(f_{ij}')$ — матрица формы f в этом базисе. Если T — матрица, перехода от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{e_i'\}$, то $F'=T^tFT$. Для получения этой формулы воспользуемся связью координат вектора в разных базисах. Если $X'=\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n'\end{pmatrix}, Y'=\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n'\end{pmatrix}$ - координаты векторов x,y в новом базисе, то $X=TX'$, $Y=TY'$. Следовательно, $f(x,y)$ = $X^tFY=$ $(TX')^tF(TY')=$ $(X')^tT^tFTY'$ $=X'^tF'Y'$. Откуда получаем выше приведенную формулу.

Определение 1.2. *Рангом билинейной формы f называется ранг соответствующей ей в каком-нибудь базисе матрицы F.*

Следствие 1.2. *Ранг билинейной формы является ее инвариантом, не зависящим от выбора базиса.*

Доказательство этого утверждения заключается в применении теоремы о ранге произведения двух матриц, одна из которых невырождена.

2. Квадратичные формы

Если для билинейной формы f выполнено условие: $f(x,y)=f(y,x)$, $x,y\in V$, то f называется симметрической билинейной формой. Указанное условие выполняется, если оно выполняется для базисных элементов: $f(e_i, e_j) = f(e_j, e_i), i, j = 1,\dots,n$. Последнее означает, что матрица $F = (f_{ij})$ этой билинейной формы – симметрическая.

Пусть теперь f симметрическая билинейная форма. Положим $q_f(x) = f(x,x), x \in V$. Тогда $q_f(-x) = q_f(x)$ и $f(x,y) = \frac{1}{2}\{q_f(x+y) - q_f(x) - q_f(y)\}$.

Действительно,

$$\frac{1}{2}\{q_f(x+y) - q_f(x) - q_f(y)\} = \frac{1}{2}\{f(x+y, x+y) - f(x,x) - f(y,y)\} =$$
$$= \frac{1}{2} f(x,y) + \frac{1}{2} f(y,x) = f(x,y).$$

Обратно, пусть $q : V \to k$ отображение пространства V в поле k такое, что

1) $q(-x) = q(x), x \in V$ и

2) $f(x,y) = \frac{1}{2}\{q(x+y) - q(x) - q(y)\}$ является билинейной (очевидно симметричной) формой. Тогда $q_f = q$.

Положим в 2) $y = -x$:

$$-f(x,x) = \frac{1}{2}[q(0) - q(x) - q(-x)].$$

Отсюда

$$q(x) = f(x,x) + \frac{1}{2} q(0).$$

Так как f - билинейная форма, то $f(0,0) = 0$. Поэтому при x=0 имеем $q(0) = \frac{1}{2} q(0)$, то есть $q(0) = 0$. Значит $q(x) = f(x,x) = q_f(x)$.

Таким образом, по каждой симметричной билинейной форме однозначно определяется квадратичная форма. Если $e_1,\dots,e_n$ - фиксированный базис в пространстве V, то $f(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij} x_i y_j$, где $f_{ij} = f(e_i, e_j)$. Тогда $q_f(x) = f(x,x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f_{ij} x_i x_j$. И матрица $F = (f_{ij})$ билинейной формы f называется также и матрицей соответствующей квадратичной формы. Соответственно, ранг F называется рангом квадратичной формы и $q_f(x) = X^t FX$.

Определение 2.1. *Квадратиная форма q имеет в базисе* $\underline{e_1,...,e_n}$ *канонический вид, если для любого* $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 f_{ii}$. *Базис* $\underline{e_1,...,e_n}$ *называется каноническим.*

Теорема 2.1. (Лагранж) *Пусть на векторном пространстве* V *размерности* n *над полем* K *задана квадратичная форма* q *ранга* $r \le n$. *Тогда в* V *существует канонический базис* $\underline{e_1,...,e_n}$, *в котором* $q(x) = \lambda_1 x_1^2 + ... + \lambda_r x_r^2$, $\lambda_i \ne 0, i = 1,...,r$.

Доказательство. Требуется построить такой базис $\{e_i\}$, чтобы соответствующая симметрическая билинейная форма f (у которой $f(x,x) = q(x)$) имела свойство $f(e_i, e_j) = 0, i \ne j, i, j = 1,...,n$. Проведем доказательство индукцией по $n = \dim_k V$.

При $n = 1: q(x) = \lambda_1 x_1^2$ и утверждение теоремы очевидно.

Пусть e_1 - такой вектор, что $q(e_1) = f(e_1, e_1) \ne 0$. Рассмотрим линейную функцию $f_1 : V \to k$, определенную правилом: $f_1(x) = f(x, e_1)$. Функция f_1 ненулевая, так как $f_1(e_1) \ne 0$. Поэтому подпространство $L = Kerf_1 = \{x \in V, f_1(x) = 0\}$ имеет размерность *n-1*. По предположению индукции L обладает базисом $e_2,...,e_n$, в котором матрица формы *f*, ограниченной на *L*, диагональна, то есть: $f(e_i, e_j) = 0, i \ne j, i, j = 2,...,n$. По построению $f(e_1, e_j) = 0, j = 2,...,n$. Следовательно, набор векторов $e_1,...,e_n$ имеет нужное нам свойство. Проверим, что система векторов $e_1,...,e_n$ - линейно независима. Если

$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n = 0$, то $\alpha_1 \neq 0$, поскольку $e_2,...,e_n$ — базис L. В таком случае $e_1 = \sum_{i=2}^{n} \beta_i e_i$ и $0 \neq f_1(e_1) = f_1\left(\sum_{i=2}^{n} \beta_i e_i\right) = \sum_{i=2}^{n} \beta_i f(e_1, e_i) = 0$ — противоречие, доказывающее линейную независимость векторов $e_1,...,e_n$.

Итак, мы доказали, что в базисе $\{e_i\}$ матрица F нашей квадратичной формы диагональна. Так как ранг квадратичной формы величина инвариантная, то количество ненулевых элементов на диагонали матрицы F равно r. Следовательно, в базисе $\{e_i\}$ форма q имеет вид: $q(x) = \lambda_1 x_1^2 + ... + \lambda_r x_r^2$.

На практике эта теорема обычно формулируется и доказывается в координатной записи.

Теорема 2.2. (Лагранж) *Пусть* $q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij} x_i x_j$ *— квадратичная форма от n переменных. Тогда существует невырожденное преобразование*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \ |Q| \neq 0,$$

такое, что $q(y) = \lambda_1 y_1^2 + ... + \lambda_r y_r^2$, *где все* $\lambda_i \neq 0$, *а* r *– ранг квадратичной формы q.*

Доказательство. Доказательство проведем индукцией по количеству переменных n. Если $n = 1$, то $q(x) = f_{11} x_1^2$ и утверждение теоремы очевидно. Предположим, что для любой квадратичной формы от $m < n$ переменных утверждение теоремы справедливо и пусть $q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} f_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} f_{ij} x_i x_j$ ненулевая квадратичная форма от n переменных. Рассмотрим два случая:

А) Существует номер i, для которого $f_{ii} \neq 0$. Меняя нумерацию переменных, будем считать, что $i = 1$. Тогда

$q(x) = f_{11}^{-1}\left(f_{11}x_1 + f_{12}x_2 + \ldots + f_{1n}x_n\right)^2 + g(x)$, где $g(x) = \sum_{i,j=2}^{n} g_{ij}x_i x_j$ - квадратичная форма от переменных $x_2,\ldots,x_n$. По предположению индукции существует невырожденное преобразование $\begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Q_1 \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, |Q_1| \neq 0,$ такое, что $g(y) = \mu_2 y_2^2 + \ldots + \mu_s y_s^2$. Рассмотрим преобразование

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q_1^{-1} & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Относительно новых переменных форма q примет вид:

$q(y) = f_{11}^{-1}y_1^2 + \mu_2 y_2^2 + \ldots + \mu_s y_s^2$. Последний пункт теоремы вытекает из того, что ранг квадратичной формы не меняется при невырожденном преобразовании, а ранг матрицы

$$\begin{bmatrix} f_{11}^{-1} & & & & & & \\ & \mu_2 & & & 0 & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \mu_s & & & \\ & 0 & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

равен числу ненулевых элементов на главной диагонали.

Б) Для всех $i : 1 \leq i \leq n, f_{ii} = 0$.

Так как $q \neq 0$, то существует коэффициент $f_{ij} \neq 0$. Меняя нумерацию, можно считать, что $f_{ij} = f_{12}$. Совершим преобразование переменных:

$x_1 = y_1 - y_2, x_2 = y_1 + y_2, x_i = y_i, i = 3,\ldots,n$. Определитель матрицы этого преобразования

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 2$$

отличен от нуля, так что мы не выходим из круга невырожденных преобразований. Тогда относительно переменных $y_1,...,y_n$ форма q будет иметь ненулевой коэффициент при y_1^2 и мы получаем пункт А).

3. Вещественные квадратичные формы

Если основное поле *k*, над которым рассматривается векторное пространство *V,* произвольно, то дальнейшее упрощение канонического вида квадратичной формы возможно только при некоторых дополнительных условиях. Пусть *K*=*R* — поле действительных чисел. Предположим, что первые s коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы $q = \lambda_1 y_1^2 + ... + \lambda_s y_s^2 + \lambda_{s+1} y_{s+1}^2 + ... + \lambda_r y_r^2$ положительны, а остальные *r-s* отрицательные. Произведем следующую замену переменных:

$z_i = \sqrt{\lambda_i} y_i, i = 1,...,s$. $z_i = \sqrt{-\lambda_i} y_i$, $i = s+1,...,r$, $z_i = y_i, i = r+1,...,n$. Тогда $q(y) = q(z) = z_1^2 + ... + z_s^2 - z_{s+1}^2 - ... - z_r^2$.

Полученное выражение называется нормальным видом квадратичной формы, а величины *s* и *r-s* количеством положительных и отрицательных квадратов.

Теорема 3.1.(Закон инерции) *Количество положительных и отрицательных квадратов в нормальном виде квадратичной формы определено однозначно.*

Доказательство. Пусть

$q = x_1^2 + ... + x_s^2 - x_{s+1}^2 - ... - x_r^2 = (x_1')^2 + ... + (x_t')^2 - (x_{t+1}')^2 - ... - (x_r')^2$ — два нормальных вида квадратичной формы q и предположим, что $t < s$. Это означает, что существуют два базиса $e_1,...,e_n$ и $e'_1,...,e'_n$ пространства V, на котором определена форма q, такие, что значения соответствующей билинейной формы $f = f_q$ на базисных элементах следующие: $f(e_i, e_i) = 1, i = 1,...,s, f(e_i, e_i) = -1, i = s+1,...,r, f(e_i, e_i) = 0, i > r;$ соответственно: $f(e'_i, e'_i) = 1, i = 1,...,t, f(e'_i, e'_i) = -1, i = t+1,...,r, f(e'_i, e'_i) = 0, i > r.$ Кроме того, $f(e_i, e_j) = f(e'_i, e'_j) = 0, i \neq j.$.

Рассмотрим в V подпространства $L = \langle e_1,...,e_s \rangle, L' = \langle e'_{t+1},...,e'_n \rangle$. Так как $\dim(L + L') \leq \dim V = n$, то по теореме 6.2 из главы 1 имеем:

$$\dim(L \cap L') = \dim L + \dim L' - \dim(L + L') \geq s + (n - t) - n = s - t > 0 .$$

Стало быть, существует ненулевой вектор $a \in L \cap L'$, для которого возможны два представления: $a = a_1 e_1 + ... + a_s e_s = a'_{t+1} e'_{t+1} + ... + a'_n e'_n$. В силу первого разложения получим

$$q(a) = f(a, a) = \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j f(e_i, e_j) = a_1^2 + ... + a_s^2 > 0 .$$

А из второго $q(a) = f(a, a) = \sum_{i,j=1}^{n} a'_i a'_j f(e'_i, e'_j) = -(a'_{t+1})^2 - ... - (a'_r)^2 \leq 0$.

(Возможно, что $r < n$ и $a'_{t+1} = ... = a'_r = 0$). Из полученного противоречия следует, что $t \geq s$. Проводя аналогичные рассуждения для случая $t > s$, получим $t \leq s$. Следовательно, $t = s$, что доказывает сформулированную теорему.

4. Положительно определенные квадратичные формы

Определение 4.1. *Пусть $q : V \to k$ квадратичная форма на V со значением в k и $F = [f_{ij}]$ — матрица этой квадратичной формы относительно некоторого фиксированного базиса. Тогда i-тым главным минором формы q называется определитель*

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} f_{11} & \dots & f_{1i} \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{i1} & \dots & f_{ii} \end{vmatrix}.$$

Теорема 4.1.(Метод Якоби) *Если все главные миноры* $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ *квадратичной формы* $q = X^t F X$ *отличны от нуля, то существует базис* $e_1', \dots, e_n'$ *пространства V, в котором форма q имеет вид:* $q = \frac{1}{\Delta_1}(x_1')^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}(x_2')^2 + \dots \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}(x_n')^2$.

Доказательство. Обозначим через f билинейную форму на пространстве V, соответствующую заданной квадратичной форме q. Тогда элементы f_{ij} матрицы F есть значения билинейной формы f на парах базисных векторов (e_i, e_j), то есть $f_{ij} = f\ (e_i, e_j)$. Построим базис $e_1', \dots, e_n'$, такой что $f\ (e_i', e_j') = 0, i \neq j$. Будем искать его в виде:

$$e_1' = c_{11} e_1$$

$$e_2' = c_{12} e_1 + c_{22} e_2$$

……………..

$$e_n' = c_{1n} e_1 + c_{2n} e_2 + \dots + c_{nn} e_n$$

Потребуем, чтобы для элементов $e_i', i = 1, \dots, n$ выполнялись условия: $f(e_i', e_t) = 0, t = 1, \dots, i-1$, $f(e_i', e_i) = 1$. Тогда $f(e_i', e_j') = f\left(e_i', \sum_{m=1}^{j} c_{mj} e_m\right) = 0, j < i$. В силу симметричности f получим, что $f(e_i', e_j') = 0, j > i$. Это обеспечивает диагональность матрицы F'(матрица формы f в базисе $e_1', \dots, e_n'$). Подставив выражения для новых базисных векторов e_i' через старые e_s в написанные выше условия, получим систему уравнений для нахождения коэффициентов c_{ti}:

$$f_{11} c_{1i} + f_{21} c_{2i} + \dots + f_{i1} c_{ii} = 0$$

$$f_{12} c_{1i} + f_{22} c_{2i} + \dots + f_{i2} c_{ii} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_{1,i-1}c_{1i} + f_{2,i-1}c_{2i} + \ldots + f_{i,i-1}c_{ii} = 0$$

$$f_{1i}c_{1i} + f_{2i}c_{2i} + \ldots + f_{ii}c_{ii} = 1$$

Определитель этой системы равен Δ_i, который по условию теоремы отличен от нуля. Следовательно, система имеет единственное решение, что обеспечивает канонический вид формы q. В частности, вычисляя по правилу Крамера неизвестное c_{ii}, имеем

$$c_{ii} = \frac{\begin{vmatrix} f_{11} & \cdots & f_{i-1,1} & 0 \\ f_{12} & \cdots & f_{i-1,2} & 0 \\ & \cdots & \cdots & \\ f_{1,i-1} & \cdots & f_{i-1,i-1} & 0 \\ f_{1,i} & \cdots & f_{i-1,i} & 1 \end{vmatrix}}{\Delta_i} = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}, i > 1.$$

При $i = 1$, система сводится к одному уравнению $f_{11}c_{11} = 1$. Откуда $c_{11} = \dfrac{1}{f_{11}} = \dfrac{1}{\Delta_1}$. Но $f'_{ii} = f(e'_i, e'_i) = f\left(e'_i, \sum\limits_{j=1}^{i} c_{ji}e_j\right) =$

$= \sum\limits_{j=1}^{i} f(e'_i, e_j)c_{ji} = c_{ii}$. Итак, коэффициенты f'_{ii} канонического вида формы q в базисе $e'_1, \ldots, e'_n$ равны c_{ii} и, следовательно, имеют вид, указанный в теореме.

Применим полученный результат для вывода необходимого и достаточного условия положительной определенности квадратичной формы, заданной на вещественном пространстве.

Определение 4.2. *Квадратичная форма* $q : V \to R$ *на вещественном пространстве* V *называется положительно определенной, когда* $q(x) > 0$ *для любого* $x \in V$, $x \neq 0$.

Теорема 4.2. *Квадратичная форма q на n-мерном вещественном пространстве V положительно определена тогда и только тогда, когда ее нормальный вид есть:* $(x'_1)^2 + (x'_2)^2 + \ldots + (x'_n)^2$.

Доказательство. Пусть $q(x) > 0$ для любого ненулевого $x \in V$. Нормальный вид формы q в некотором базисе $e'_1,...,e'_n$ есть $(x'_1)^2 + ... + (x'_s)^2 - (x'_{s+1}) - ... - (x'_r)^2$. Если $r < n$, то $q(e'_n) = 0$. Если $r = n$, но $s < n$, то $q(e'_n) < 0$. Оба случая противоречат положительной определенности формы q, то есть $s = r = n$. Достаточность доказывается еще проще.

Теорема 4.3. (Критерий Сильвестра) *Квадратичная форма q на n-мерном вещественном пространстве V положительно определена тогда и только тогда, когда все главные миноры $\Delta_1,...,\Delta_n$ ее матрицы F строго положительны.*

Доказательство. Пусть все $\Delta_i > 0, i = 1,...,n$. Тогда, используя метод Якоби, можно найти базис $e'_1,...,e'_n$, в котором $q(x') = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}(x'_1)^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}(x'_2)^2 + ... \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}(x'_n)^2$, $\Delta_0 = 1$. Сделав замену переменных $x''_i = \sqrt{\frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}}x'_i$, $i = 1,...,n$, получим: $q(x'') = (x''_1)^2 + ... + (x''_n)^2$. Отсюда, в силу теоремы 4.2, получим что q - положительно определена.

Необходимость докажем индукцией по $\dim V = n$.

При $n = 1$ форма $q(x)$ имеет вид $f_{11}x_1^2$. Если $q(x) > 0$, то $f_{11} = \Delta_1 > 0$. Что доказывает теорему в этом случае. При $n > 1$ рассмотрим подпространство $U = \left\{ x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mid x_n = 0 \right\}$. Матрица ограничения квадратичной формы $q|_U$ равна $\begin{bmatrix} f_{11} & \cdots & f_{1,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n-1,1} & \cdots & f_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$. По предположению индукции все главные миноры этой матрицы строго положительны. Но они являются минорами $\Delta_1, \Delta_2,...,\Delta_{n-1}$ матрицы F. Осталось проверить положительность последнего главного минора Δ_n, который совпадает с определителем $|F|$ матрицы F. По теореме 4.2 нормальный вид формы q есть $(x_1')^2 + (x_2')^2 + ... + (x_n')^2$. Следовательно, существует такая невырожденная матрица $T = (t_{ij})$, $t_{ij} \in R$, что $E = T^t F T$, где E - единичная матрица. Переходя к определителям, получим $|T|^2 |F| = 1$. То есть $|F| = \frac{1}{|T|^2} > 0$.

Замечание: Используя полученные результаты, можно сказать, что любое скалярное произведение на n-мерном вещественном пространстве V в координатной форме имеет вид: $(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij} x_i y_j = X^t F Y$, где F — симметрическая матрица, все главные миноры которой строго положительны.

Глава 5. Нормальные операторы

1. Перенос сопряженного оператора в исходное пространство

Основной целью этой главы будет описание линейных операторов, сохраняющих геометрию евклидова (соответственно унитарного) пространства. Так как геометрия этих пространств определяется соответствующим скалярным произведением, то указанное выше условие будет означать сохранение скалярного произведения.

Вначале рассмотрим конструкцию, которая позволяет рассматривать действие сопряженного оператора (см. глава 2, параграф 5) в исходном пространстве.

Пусть V — евклидово пространство. Для любой линейной функции λ из V^* (см. глава 2, параграф 5) существует вектор $y_\lambda \in V$, такой, что $\lambda(x) = (x \mid y_\lambda), x \in V$. Действительно, если $e_1,\dots,e_n$ - ортонормированный базис пространства V, то в качестве y_λ необходимо взять $\sum_{j=1}^{n} \lambda(e_j)e_j$.

Теорема 1.1. *Отображение* $\lambda \to y_\lambda$, *где* $\lambda \in V^*, y_\lambda \in V$ *задает изоморфизм пространств* V *и* V^*.

`Доказательство`. Провести самостоятельно.

Изоморфизм из предыдущей теоремы обозначим через φ. Пусть $\psi \in End_R(V)$. Тогда действие оператора ψ^* из $End_R(V^*)$ определено правилом $(\psi^*\lambda)(x) = \lambda(\psi x)$, где $x \in V, \lambda \in V^*$. Определим оператор ψ_V^*, действующий в пространстве V, формулой:

$\psi_V^*(y_\lambda) = \varphi(\psi^*(\varphi^{-1}y_\lambda))$. Указанное правило делает коммутативной следующую диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} \lambda & \xleftarrow{\varphi^{-1}} & y_\lambda \\ \psi^* \downarrow & & \downarrow \psi_V^* \\ \psi^*\lambda & \xrightarrow{\varphi} & y_{\psi^*\lambda} \end{array}.$$

Тогда $(\psi x \mid y_\lambda) = (x \mid \psi_V^* y_\lambda)$. Действительно, $(\psi x \mid y_\lambda) = \lambda(\psi(x))$.

С другой стороны, $(x \mid \psi_V^* y_\lambda) = (x \mid y_{\psi^*\lambda}) = (\psi^*\lambda)(x) = \lambda(\psi(x))$.

Когда функция λ пробегает пространство V^*, вектор y_λ принимает все значения из V. Поэтому последнюю формулу можно переписать так: $(\psi x \mid y) = (x \mid \psi_V^* y)$. Если речь идет только об операторах $\psi, \psi_V^* \in End_R(V)$, то оператор ψ_V^* будем записывать как ψ^*. В результате этих соглашений доказанная формула приобретает вид:

$$(\psi x \mid y) = (x \mid \psi^* y), x, y \in V.$$

Эта формула справедлива и для унитарных пространств. Для ее проверки необходимо только при доказательстве теоремы 1.1 в качестве вектора y_λ взять вектор $\sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda(e_j)} e_j$, где $e_1, ..., e_n$ — некоторый ортонормированный базис унитарного пространства V. Отметим связь между матрицами линейных операторов φ и φ^*. Пусть

$A_\varphi = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \cdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ - матрица оператора φ в ортонормированном базисе $e_1,...,e_n$. Тогда $(\varphi e_i \mid e_k) = \left(\sum_{j=1}^n a_{ji} e_j \mid e_k\right) = a_{ki}$. Если $\varphi^* e_k = \sum_{s=1}^n a^*_{sk} e_s$, то $\left(e_i \mid \varphi^* e_k\right) = \left(e_i \mid \sum_{s=1}^n a^*_{sk} e_s\right) = \overline{a}^*{}_{ik}$. В силу формулы $(\varphi e_i \mid e_k) = \left(e_i \mid \varphi^* e_k\right)$, получим $a^*_{ik} = \overline{a}_{ki}$ или $A_{\varphi^*} = \overline{A}^t_\varphi$.

2. Канонический вид нормального оператора в унитарном пространстве

Определение 2.1. *Пусть* V *— унитарное пространство,* $\varphi \in End_C(V)$. *Оператор* φ *называется нормальным, если* $\varphi\,\varphi^* = \varphi^*\,\varphi$.

Теорема 2.1. *Оператор* φ *— нормален тогда и только тогда, когда в пространстве* V *существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора* φ *имеет диагональный вид.*

Предварительно докажем несколько лемм.

Лемма 2.1. *Если v— собственный вектор нормального оператора* $\varphi : \varphi v = av$, $a \in C$, *то v— собственный вектор оператора* φ^*, *причем* $\varphi^* v = \overline{a} v$.

Доказательство. Обозначим через U подпространство собственных векторов оператора φ, отвечающих собственному значению $a : U = \{v \in V, \varphi v = av\}$. Тогда $\varphi(\varphi^* v - \overline{a} v) = \varphi^* \varphi v - \overline{a}\varphi v = a(\varphi^* v - \overline{a} v)$, если $v \in U$, т.е. $\varphi^* v - \overline{a} v \in U$. С другой стороны, $(u \mid \varphi^* v - \overline{a} v) = (\varphi u \mid v) - a(u \mid v) = 0$, если $u \in U$. Таким образом $\varphi^* v - \overline{a} v \in U^\perp$, для любого вектора $v \in V$. Следовательно, если $v \in U$, то $\varphi^* v - \overline{a} v \in U \cap U^\perp = 0$. Значит $\varphi^* v = \overline{a} v$, когда $\varphi v = av$.

Лемма 2.2. *Если* V *— унитарное или евклидово пространство* U*-инвариантное подпространство для оператора* $\varphi \in End(V)$*, то* $U^{\perp}$ *- инвариантно относительно* φ^{*}.

Доказательство. Пусть $x \in U, y \in U^{\perp}$. Тогда $(\varphi x \mid y) = 0,$ так как $\varphi x \in U$. С другой

стороны, $(\varphi x \mid y) = (x \mid \varphi^{*} y)$. Значит, $\varphi^{*}\ y \in U^{\perp}$.

Аналогичным рассуждением доказывается

Лемма 2.3. *Если* $\varphi\, U \subseteq U, \varphi^{*} U \subseteq U$*, то* $\varphi\, U^{\perp} \subseteq U^{\perp}$*,* $\varphi^{*} U^{\perp} \subseteq U^{\perp}$

Доказательство теоремы 2.1. Пусть φ — нормальный оператор, действующий в конечномерном унитарном пространстве V. Если $\dim_C V$=1, то утверждение теоремы справедливо. Пусть $\dim_C V = n > 1$. Обозначим через $U = \{u \in V, \varphi u = au, a \in C\}$ - подпространство собственных векторов, отвечающих собственному значению a. Достаточно рассматривать случай, когда $U \neq V$. Кроме того $U \neq 0$.

В силу леммы 2.1 $\varphi^{*} U \subseteq U$. Тогда по лемме 2.3 $\varphi\, U^{\perp} \subseteq U^{\perp}$, $\varphi^{*} U^{\perp} \subseteq U^{\perp}$. А так как $\dim U^{\perp} = \dim V - \dim U < \dim V$, то, применяя предположение индукции, получим, что существует ортонормированный базис $e_1,...,e_s$ в $U^{\perp}$, в котором матрица сужения оператора φ — диагональная.

Так как $V = U \oplus U^{\perp}$, то, объединяя базисы подпространств U и $U^{\perp}$, получим утверждение теоремы.

Обратно, пусть существует ортонормированный базис $e_1,...,e_n$ пространства V, в котором матрица A_{φ} оператора φ — диагональная. Используя формулу из параграфа 1, имеем $A_{\varphi^{*}} = \overline{A}_{\varphi}^{t}$. Значит $A_{\varphi^{*}}$ также диагональная. Следовательно, $A_{\varphi}\ A_{\varphi^{*}} = A_{\varphi^{*}}\ A_{\varphi}$ или $\varphi\, \varphi^{*} = \varphi^{*}\, \varphi$.

3. Комплексификация векторных пространств

Для получения канонического вида нормального оператора в вещественном случае нам потребуется процедура комплексификации векторного пространства.

Пусть V - вещественное пространство. Обозначим через $\tilde{V}$ совокупность пар $(x, y), x, y \in V$ и введем в $\tilde{V}$ покомпонентную процедуру сложения, то есть $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$. Если поле комплексных чисел интерпретировать как множество пар $(a,b), a,b \in R$ с операциями сложения $(a,b) + (a',b') = (a + a',b + b')$ и умножения $(a,b)(a',b') = (aa' - bb',ab' + ba')$, то можно превратить $\tilde{V}$ в векторное пространство над **C**, если умножение на константы из **C** задать формулой:

$$(a,b)(x, y) = (ax - by, ay + bx) .$$

Проверки аксиом векторного пространства повторяют соответствующие проверки аксиом поля C. В частности, отождествляя пару $(0,1)$ и мнимую единицу, имеем $i(x, y) = (0,1)(x, y) = (-y, x)$. То есть $(x, y) = (x,0) + (0, y) = (x,0) + i(y,0)$. Поэтому пару (x, y) будем записывать в виде $x + iy$, а операции сложения и умножения примут вид:

$$(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y') ,$$

$$(a + bi)(x + iy) = (ax - by) + i(by + ax), a,b \in R, x, y \in V .$$

Полученное пространство $\tilde{V}$ будем называть комплексификацией пространства V.

Если V евклидово пространство, то $\tilde{V}$ можно превратить в унитарное, задав эрмитово произведение на $\tilde{V}$ по формуле:

$$\begin{aligned}(z_1 \mid z_2)_{\tilde{V}} &= (x_1 + iy_1 \mid x_2 + iy_2)_{\tilde{V}} = \\ &= (x_1 \mid x_2)_V + (y_1 \mid y_2)_V + i(y_1 \mid x_2)_V - i(x_1 \mid y_2)_V .\end{aligned}$$

Все аксиомы эрмитова произведения проверяются непосредственным вычислением. Если φ - линейный оператор, действующий на

V, то его можно продлить до линейного оператора $\overline{\varphi}$ на $\widetilde{V}$ по формуле: $\overline{\varphi}(x+iy)=\varphi x+i\varphi y$.

Предложение 3.1. $\overline{\varphi}^*=\overline{\varphi^*}$.

Доказательство. Для любых векторов z_1, z_2 из $\widetilde{V}$ имеем:

$$\left(z_1 \mid \overline{\varphi}^* z_2\right)=\left(\overline{\varphi} z_1 \mid z_2\right)=\left(\varphi x_1+i\varphi y_1 \mid x_2+iy_2\right)=$$
$$=\left(\varphi x_1 \mid x_2\right)+\left(\varphi y_1 \mid y_2\right)+i\left(\varphi y_1 \mid x_2\right)-i\left(\varphi x_1 \mid y_2\right)=$$
$$=\left(x_1 \mid \varphi^* x_2\right)+\left(y_1 \mid \varphi^* y_2\right)+i\left(y_1 \mid \varphi^* x_2\right)-i\left(x_1 \mid \varphi^* y_2\right)=$$

$\left(x_1 \mid \varphi^* x_2+i\varphi^* y_2\right)+\left(iy_1 \mid \varphi^* x_2+i\varphi^* y_2\right)=\left(x_1 \mid \overline{\varphi^*} z_2\right)+\left(iy_1 \mid \overline{\varphi^*} z_2\right)=\left(z_1 \mid \overline{\varphi^*} z_2\right)$. Так как z_1 - произвольный вектор из V, то $\overline{\varphi}^* z_2=\overline{\varphi^*} z_2$. Но z_2 - также любой вектор из V, следовательно, $\overline{\varphi}^*=\overline{\varphi^*}$.

4. Канонический вид нормального оператора в вещественном случае

Определение нормального оператора для евклидовых пространств дословно повторяет эрмитов случай. А именно, φ - нормален, если $\varphi\varphi^*=\varphi^*\varphi$.

Теорема 4.1. *Пусть V - евклидово пространство. Тогда оператор φ - нормален тогда и только тогда, когда существует ортонормированный базис в V, в котором матрица A_{φ} оператора φ имеет клеточно-диагональный вид, причем каждая клетка на диагонали имеет либо вид $[a]$, либо $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, a,b\in R$.*

Так же как в предыдущем параграфе, вначале докажем ряд вспомогательных предложений.

Предложение 4.1. *Пусть $\overline{\varphi}$ - продолжение линейного оператора φ на комплексификацию $\widetilde{V}$ пространства V. Тогда $\overline{\varphi} z=\lambda z$, если и только если*

$$\varphi x=ax-by, \qquad (*)$$

$$\varphi y = bx + ay,$$

где $z = x + iy \in \widetilde{V}, x, y \in V, \lambda = a + bi \in C, a, b \in R$.

Доказательство. По определению $\overline{\varphi} z = \varphi x + i\varphi y$. С другой стороны, $\lambda z = (a+bi)(x+iy) = ax - by + i(ay + bx)$. Сравнивая два этих выражения, получаем необходимость утверждения предложения 4.1. Достаточность условий (*) также очевидна.

Следствие 4.1. *Если* $\overline{\varphi} z = \lambda z$, *то* $\overline{\overline{\varphi} z} = \overline{\lambda}\,\overline{z}, \overline{z} = x - iy$.

Доказательство: $\overline{\lambda}\,\overline{z} = (a - bi)(x - iy) = \; = ax - by - i(ay + bx) = \varphi x - i\varphi y = \overline{\overline{\varphi} z}$.

Предложение 4.2. *Пусть* V *евклидово пространство, а* $x, y \in V$ *такие, что* $\varphi x = ax - by, \varphi y = bx + ay, b \neq 0$, *причем* φ *- нормален. Тогда* $(x \mid y) = 0, (x \mid x) = (y \mid y)$.

Доказательство. В силу предложения 4.1 для $\overline{\varphi}$ имеем: $\overline{\varphi} z = \lambda z,\; \lambda = a + bi,\; z = x + iy \in \widetilde{V}$. Используя следствие 4.1, получим $\overline{\lambda}\overline{z} = \overline{\varphi}\overline{z}$. Тогда по следствию 2.1 (см. параграф 2): $\overline{\varphi}^{*}\overline{z} = \lambda\overline{z}$.

Вычислим теперь скалярное произведение $(\overline{\varphi} z \mid \overline{z})$ двумя способами. С одной стороны, $(\overline{\varphi} z \mid \overline{z}) = (\lambda z \mid \overline{z}) = \lambda (z \mid \overline{z})$. С другой: $(\overline{\varphi} z \mid \overline{z}) = (z \mid \overline{\varphi}^{*}\overline{z}) = (z \mid \lambda \overline{z}) = \overline{\lambda}(z \mid \overline{z})$. Так как $b \neq 0$, то $\lambda \neq \overline{\lambda}$ и поэтому $(z \mid \overline{z}) = 0$. Но $(z \mid \overline{z}) = (x + iy \mid x - iy) = (x \mid x) - (y \mid y) + i(y \mid x) + i(x \mid y)$.

Приравнивая нулю действительную и мнимую часть этого выражения, получим утверждение предложения.

Доказательство теоремы 4.1.

Если характеристический многочлен $|A_{\varphi} - \lambda E|$ имеет действительный корень λ_0, то, как и при доказательстве теоремы 2.1, определяем подпространство $U = \{v, \varphi v = \lambda_0 v\}$ и дословно повторяем упомянутое доказательство.

Пусть все характеристические корни оператора φ — комплексные. Тогда перейдем к комплексифицированному пространству $\widetilde{V}$ и оператору $\overline{\varphi}$. Заметим, что из нормальности φ вытекает нормальность $\overline{\varphi}$. Действительно:

$$\overline{\varphi}\overline{\varphi}^*(x+iy)=\overline{\varphi}\overline{\varphi^*}(x+iy)=\overline{\varphi}(\varphi^*x+i\varphi^*y)=\varphi\varphi^*x+i\varphi\varphi^*y\,,$$

$$\overline{\varphi}^*\overline{\varphi}(x+iy)=\overline{\varphi}^*(\varphi x+i\varphi y)=\overline{\varphi^*}(\varphi x+i\varphi y)=\varphi^*\varphi x+i\varphi^*\varphi y\,.$$

Из равенства полученных выражений следует, что $\overline{\varphi}\overline{\varphi}^*=\overline{\varphi}^*\overline{\varphi}$. Если $z=x+iy$ собственный вектор оператора $\overline{\varphi}$, то есть $\overline{\varphi}z=\lambda_0 z, \lambda_0=a+bi\in C,$ то $\varphi x=ax-by, \varphi y=bx+ay$.

Рассмотрим подпространство $U=\langle x,y\rangle$, натянутое на вектора x,y. Очевидно, что $\varphi U\subseteq U$. Проверим, что $\varphi^* U\subseteq U$. В силу следствия 2.1 из $\overline{\varphi}z=\lambda_0 z$ имеем $\overline{\varphi}^*z=\overline{\lambda}_0 z$. Или $\overline{\varphi^*}z=\overline{\lambda}_0 z$. Так как $\overline{\varphi^*}z=\varphi^*x+i\varphi^*y$, а $\lambda_0 z=(ax+by)+i(ay-bx)$, то

$$\begin{aligned}\varphi^*x&=ax+by,\\ \varphi^*y&=ay-bx\end{aligned}.$$

То есть $\varphi^* U\subseteq U$.

По лемме 2.3 $\varphi^* U^\perp\subseteq U^\perp$, $\varphi\, U^\perp\subseteq U^\perp$. Так как $\dim_R U=2$, то $\dim_R U^\perp<\dim_R V$ и по предположению индукции в $U^\perp$ существует базис с необходимыми свойствами. В качестве базиса в U берем $e_1=\dfrac{x}{\|x\|}, e_2=\dfrac{y}{\|y\|}$. Объединяя базисы U и $U^\perp$, получим утверждение теоремы о виде матрицы A_φ.

Для проверки утверждения в обратную сторону достаточно заметить, что матрица A_{φ^*} также будет блочно-диагональная и $\begin{bmatrix}a & b\\ -b & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & -b\\ b & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ -b & a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a^2+b^2 & 0\\ 0 & a^2+b^2\end{bmatrix}$. Поэтому $A_\varphi\, A_{\varphi^*}=A_{\varphi^*}\, A_\varphi$, или $\varphi\,\varphi^*=\varphi^*\,\varphi$.

5. Унитарные операторы

Применим полученные результаты для описания операторов, сохраняющих скалярное произведение.

Определение 5.1. *Пусть V - унитарное пространство. Тогда оператор $\varphi \in End_C(V)$ называется унитарным, если* $(\varphi x \mid \varphi y) = (x \mid y), x, y \in V$.

Предложение 5.1. *Оператор φ унитарен тогда и только тогда, когда выполняются следующие равносильные утверждения:*

1) Образы $\varphi e_1,...,\varphi e_n$ некоторого ортонормированного базиса $e_1,...,e_n$ также ортонормированный базис.

2) Образы $\varphi e_1,..., \varphi e_n$ любого ортонормированного базиса $e_1,...,e_n$ также ортонормированный базис.

3) $\varphi^{-1} = \varphi^*$, т.е. оператор, сопряженный к φ, совпадает с обратным к φ.

Доказательство. Пусть φ - унитарен, и $e_1,...,e_n$ - некоторый (любой) ортонормированный базис. Тогда $(\varphi e_i \mid \varphi e_j) = (e_i \mid e_j) = \delta_{ij}$. Т.е. $\varphi e_1,..., \varphi e_n$ - ортонормированный базис.

Обратно, пусть $\varphi e_1,..., \varphi e_n$ - ортонормированный базис для некоторого (любого) ортонормированного базиса $e_1,...,e_n$. То есть $(\varphi e_i \mid \varphi e_j) = (e_i \mid e_j) = \delta_{ij}$. Для любых двух векторов $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$ имеем: $(x \mid y) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j (e_i \mid e_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$,

$(\varphi x \mid \varphi y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \varphi e_i \mid \sum_{j=1}^{n} y_j \varphi e_j \right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j (\varphi e_i \mid \varphi e_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Сравнивая полученные формулы, имеем $(x \mid y) = (\varphi x \mid \varphi y)$. Мы проверили эквивалентность исходного определения и пунктов 1) и 2).

Проверим эквивалентность определения унитарного оператора и пункта 3).

Если φ - унитарен, то $(x \mid y) = (\varphi x \mid \varphi y) = (x \mid \varphi^* \varphi y)$. То есть $(x \mid y - \varphi^* \varphi y) = 0$. Следовательно, $\varphi^* \varphi = 1$.

Обратно, если $\varphi^* = \varphi^{-1}$, то из формулы $(\varphi x \mid \varphi y) = (x \mid \varphi^* \varphi y)$ получаем $(\varphi x \mid \varphi y) = (x \mid y)$. Предложение полностью доказано.

Теорема 5.2. *Для любого унитарного оператора существует ортонормированный базис, в котором его матрица имеет вид:*

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

причем $|\lambda_i| = 1, i = 1,...,n$.

Доказательство. Если φ - унитарен, то в силу пункта 3) предложения 5.1 он нормален. Поэтому, по теореме 2.1, существует ортонормированный базис, в котором матрица A_φ - диагональна. Из условия $\varphi^* = \varphi^{-1}$ следует, что $\overline{A}_\varphi^t = A_{\varphi^{-1}}$, то есть для каждого диагонального элемента λ_i выполняется равенство $\overline{\lambda_i} = \lambda_i^{-1}$. Что равносильно условию $|\lambda_i| = 1$.

Заметим, что матрица унитарного оператора в любом ортонормированном базисе имеет достаточно специальный вид.

Пусть $e_1,...,e_n$ - некоторый ортонормированный базис и действие унитарного оператора φ в этом базисе задается формулами:

$\varphi e_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j, i = 1,...,n$. Тогда, используя пункт 2 предложения 5.1,

имеем: $\delta_{ik} = (\varphi e_i \mid \varphi e_k) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j \mid \sum_{s=1}^{n} a_{sk} e_s \right) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \overline{a}_{jk} = (\alpha_i \mid \alpha_k)$, где

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}, \ \alpha_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix}.$$

Так как из полученного условия вытекает унитарность оператора φ, то можно сформулировать следующий вывод: Матрица линейного оператора в ортонормированном базисе является матрицей унитарного оператора тогда и только тогда, когда скалярное произведение столбцов матрицы с разными номерами равно нулю, а скалярный квадрат каждого столбца равен единице. Такую матрицу принято называть унитарной матрицей.

6. Ортогональные операторы

Определение ортогонального оператора аналогично определению унитарного.

Определение 6.1. *Пусть V - евклидово пространство. Тогда оператор $\varphi \in End_R(V)$ называется ортогональным, если* $(x \mid y) = (\varphi x \mid \varphi y), x, y \in V$.

Предложение 6.1. *Оператор φ ортогонален тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) Образы $\varphi e_1,...,\varphi e_n$ некоторого (любого) ортонормированного базиса $e_1,...,e_n$ также ортонормированный базис.

2) $\varphi^* = \varphi^{-1}$, оператор сопряженный к оператору φ совпадает с обратным к нему.

Доказательство аналогично доказательству предложения 5.1.

Теорема 6.2. *Оператор φ ортогонален тогда и только тогда, когда существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора A_φ имеет блочно-диагональный вид, причем блоки на диагонали равны либо $[\pm 1]$, либо $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.*

Доказательство. Если φ ортогонален, то φ нормален. Следовательно, по теореме 4.1 существует ортонормированный базис, в котором матрица A_φ имеет блочно-диагональный вид, причем блоки на диагонали равны либо $[\lambda], \lambda \in R$, либо $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, a, b \in R$.

Кроме того, из ортогональности оператора φ имеем $A_{\varphi^*} = A_{\varphi^{-1}}$. Но $A_{\varphi^*} = \overline{A}^t_\varphi = A^t_\varphi$, то есть $A^t_\varphi = A_{\varphi^{-1}} = A^{-1}_\varphi$. Следовательно, для каждого диагонального блока получим:

Либо $\lambda = \lambda^{-1}$, либо $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$. Из этих соотношений легко получить либо $\lambda = \pm 1$, либо $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

Обратно, пусть матрица оператора A_φ — блочно-диагональная и блоки равны либо $[\pm 1]$, либо $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$. Тогда матрица A^{-1}_φ также блочно-диагональная и соответствующие блоки равны либо $[\pm 1]$, либо $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$. То есть матрица A^{-1}_φ совпадает с A^t_φ — матрицей, транспонированной к A_φ. Но $A^t_\varphi = A_{\varphi^*}$ (если базис ортонормированный), следовательно $\varphi^* = \varphi^{-1}$. Что доказывает ортогональность оператора φ.

Полученному результату можно придать определенный геометрический смысл.

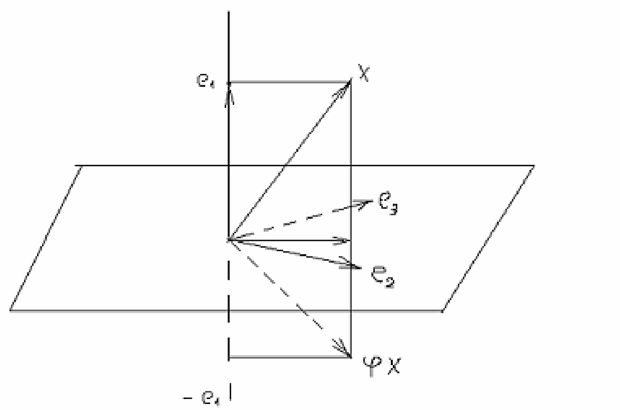
Представим матрицу P произвольного ортогонального оператора φ в виде произведения $\prod_i P_i$, (соответственно $\varphi = \prod_i \varphi_i$), где каждое

P_i либо матрица $\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & -1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$, либо матрица

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} & \\ & 0 & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Пусть для определенности в первом случае:

$\varphi_k e_1 = -e_1, \varphi_k e_i = e_i, i = 2,...,n.$ Если $n = 3$, то получаем отражение относительно плоскости, натянутой на вектора e_2, e_3.



Имея в виду эту аналогию, соответствующий оператор φ_k назовем отражением относительно гиперплоскости.

Во втором случае:

$\varphi_s e_1 = \cos\alpha e_1 + \sin\alpha e_2$, $\varphi_s e_2 = \cos\alpha e_2 - \sin\alpha e_1$, $\varphi_s e_i = e_i, i = 3,...,n$. Если $n=3$, то получаем поворот плоскости, натянутой на вектора e_1, e_2 и ортогональной подпространству $< e_3 >$. Опять по аналогии назовем соответствующий оператор поворотом двумерной плоскости, ортогональной к $(n - 2)$-мерному подпространству.

В качестве вывода можно сформулировать такое утверждение: каждый ортогональный оператор в евклидовом пространстве является произведением конечного числа отражений и конечного числа поворотов.

7. Самосопряженные (симметрические) операторы

Определение 7.1. *Пусть V – эрмитово (евклидово) пространство. Оператор $\varphi \in End(V)$ называется самосопряженным (симметрическим), если $\varphi = \varphi^*$.*

Заметим, что условие самосопряженности (симметричности) равносильно соотношению: $(\varphi x \mid y) = (x \mid \varphi y), x, y \in V$. Для матрицы самосопряженного оператора в ортонормированном базисе имеем: $A_{\varphi^*} = \overline{A}_{\varphi}^{t} = A_{\varphi}$. Т.е. $\overline{a}_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1,...,n, n = \dim V$, в частности $a_{ii} \in R,\ i = 1,...,n$.

Для матрицы симметрического оператора эти условия выглядят так: $a_{ji} = a_{ij}, i, j = 1,...,n, n = \dim V$. Получаем обычное определение симметрической матрицы.

Теорема 7.1. *Пусть V - унитарное (евклидово) пространство. Оператор $\varphi \in End(V)$ является самосопряженным (симметрическим) тогда и только тогда, когда существует ортонормированный базис, в котором матрица*

$$A_{\varphi} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

причем все λ_i - вещественны.

Доказательство. Из самосопряженности (симметричности) оператора φ вытекает его нормальность. Поэтому можно воспользоваться теоремами 2.1 и 4.1.

В первом случае сразу получаем необходимый диагональный вид матрицы

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

$\lambda_i \in C, n = \dim V$. Но так как $A_{\varphi^*} = \overline{A}_\varphi^t = A_\varphi$, то $\lambda_i = \overline{\lambda}_i$. Т.е. $\lambda_i \in R, i = 1,...,n$.

В случае евклидова пространства канонический вид матрицы A_φ - блочно-диагональный, причем на диагонали либо блоки $[\lambda_i]$, либо блоки $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, a, b \in R$. Опять, используя условие $A_{\varphi^*} = \overline{A}_\varphi^t = A_\varphi$, получим $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$. Откуда $b = 0$ и, следовательно, A_φ имеет необходимый диагональный вид с вещественными параметрами. Проверка достаточности очевидна.

8. Приведение квадратичной формы к главным осям

В главе 4 были рассмотрены два способа (метод Лагранжа и метод Якоби), которые позволяли получить канонический вид квадратичной формы, используя невырожденные преобразования. Можно сузить класс преобразований и рассматривать только ортогональные преобразования (рассматриваем только случай евклидовых пространств). Тогда, как будет показано ниже, квадратичная форма также приводится к каноническому виду, причем сохраняется геометрия пространства, то есть расстояние между точками и углы между векторами.

Пусть $q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j = X^t A X$ — некоторая квадратичная форма над полем действительных чисел. Здесь $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$ — симметрическая матрица, $X = (x_1, \ldots, x_n)^t = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, где $e_1, ..., e_n$ — ортонормированный базис, в котором значения соответствующей билинейной формы f_q определяются элементами матрицы A, то есть

$f_q(e_i, e_j) = a_{ij}$. По теореме 7.1 существует ортонормированный базис $e_1', \ldots, e_n'$, в котором матрица A' симметричного оператора, определяемого матрицей A, диагональна, причем $A' = T^{-1}AT$, где T матрица перехода к новому базису $e_1', \ldots, e_n'$. Так как оба базиса ортонормированны, то матрица T – ортогональна, то есть $T^{-1} = T^t$. Таким образом $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = A' = T^t AT$. Но последнее соотношение задает изменение матрицы квадратичной формы под действием преобразования T. То есть, если $(x_1, \ldots, x_n)^t = T(x_1', \ldots, x_n')^t$, где $(x_1', \ldots, x_n')$ координаты вектора x в новом базисе, то $q(x) = \lambda_1 (x_1')^2 + \ldots + \lambda_n (x_n')^2$. Причем $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — характеристические корни матрицы A, так как A' и A — подобны.

Из диагональности матрицы A' следует, что $e_1', \ldots, e_n'$ — есть собственные вектора соответствующего симметрического оператора, а их координаты в исходном базисе $e_1, \ldots, e_n$ - это элементы матрицы T: $e_i' = \sum_{j=1}^{n} t_{ji} e_j, i = 1, \ldots, n$. Таким образом, можно сформулировать следующий алгоритм приведения квадратичной формы к каноническому виду (к главным осям).

1. Записать матрицу A квадратичной формы $q = \sum_{j,i=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$.
2. Найти корни характеристического многочлена этой матрицы.
3. Для каждого характеристического корня λ_i найти фундаментальную систему решений однородной системы уравнений $(A - \lambda_i E)X = 0$.
4. Ортонормировать эту систему: $e_1', \ldots, e_n'$.
5. Канонический вид $q = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$, а преобразование $X=TY$, приводящее q к такому каноническому виду, имеет в качестве матрицы T

матрицу, столбцы которой есть координаты векторов $e_1',...,e_n'$ в старом базисе.

В этом алгоритме требует пояснения пункт 3, в котором предполагается, что количество векторов фундаментальной системы для $(A-\lambda_i E)X=0$ совпадает с кратностью характеристического корня λ_i.

Пусть k_j - кратность характеристического корня λ_j, а r_j - ранг матрицы $A-\lambda_j E$. Тогда число векторов фундаментальной системы решений для однородной системы уравнений $(A-\lambda_j E)X=0$ равно $n-r_j$, где n – размер матрицы A или n=dim V. (V – соответствующее евклидово пространство). Так как

$$A' = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_j \; k_j & 0 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & 0 & \lambda_j & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_s \end{bmatrix}$$

то ранг $(A'-\lambda_j E)$ равен $n-k_j$, то есть совпадает с количеством ненулевых элементов на диагонали.

Но ранг $(A'-\lambda_j E)$ равен рангу $(A-\lambda_j E)=r_j$. То есть $n-k_j=r_j$. Следовательно, $k_j=n-r_j=\dim\{v\in V,(A-\lambda_j E)v=0\}$.

Второе замечание касается пункта 4. Достаточно ортогонализировать не всю систему собственных векторов, а только подсистемы векторов, относящихся к одному собственному значению. Действительно, собственные вектора симметрического оператора, отвечающие различным собственным значениям, уже ортогональны. Если *x, y* такие вектора для симметрического оператора φ, причем $\varphi x=\lambda x, \varphi y=\mu y, \lambda\neq\mu$, то из соотношения $(\varphi x\mid y)=(x\mid\varphi y)$ имеем $\lambda(x\mid y)=\mu(x\mid y)$, то есть $(x\mid y)=0$, так как $\lambda\neq\mu$.

Пример: $q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$

1.Матрица формы q: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

2.Характеристический многочлен $|A - \lambda E| = -\lambda + 3\lambda^2 + 3\lambda + 5$. Корни характеристического многочлена: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 5$.

3.Нахождение фундаментальной системы решений:

А) $\lambda = -1$. Система приводится к виду: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Ее фундаментальная система решений: $f_1 = (-1,1,0), f_2 = (-1,0,1)$.

Б) $\lambda = 5$. Система приводится к виду: $\begin{matrix} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{matrix}$

Ее фундаментальная система решений: $f_3 = (1,1,1)$.

4.Так как $(f_1 \mid f_3) = (f_2 \mid f_3) = 0$, то ортогонализуем пару векторов f_1, f_2. Получим: $b_1 = (-1,1,0), b_2 = (-1,-1,2)$. Нормируя вектора *b₁, b₂, f₃*, получим окончательный ортонормированный базис $e_1' = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $e_2' = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$, $e_3' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

5.Квадратичная форма в новом базисе имеет вид: $q(x') = -(x_1')^2 - (x_2')^2 + 5(x_3')^2$, матрица перехода к новому базису $T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$. Непосредственным вычислением можно убедиться, что $T^t A T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Литература

1. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 2. Линейная алгебра. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. – 386 с.
2. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. – М. Наука, 1971. – 271с.
3. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М. :Наука”, 1965. – 431с.
4. Ермолаев Ю.Б. Линейные преобразования. – Казань, 1987. – 47с.
5. Ермолаев Ю.Б. Линейные операторы в унитарных и евклидовых пространствах. – Казань, 1994. – 45с.